大学生数学考研竞赛辞海538页

张祖锦编著

本文档及参考解答将不断免费更新于如下二维码:

图 1: 大学生数学考研竞赛题海参考解答二维码

题目后面有6个数字, 在上述二维码中找到后点开即可看到参考解答. 如果 pdf 或参考解答有错误, 请指出, 方便我后续修改这个 pdf 和参考答案链接. 谢谢.

图 2: 跟锦数学, 跟锦考研, 小锦教学, 数学考研锦囊, 数学奥赛微信公众号

目录

第一章　　数学分析篇

Contents

实数理论

1. 试证：对任意无理数 α 和任意正整数 n，都存在正整数 q_n 和整数 p_n 使得 @跟锦数学微信公众号
$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{nq_n},\quad \left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}.$$
[数学考研竞赛00016]

2. 设 α 是无理数，试证：$A=\{m+n\alpha;m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，也即：任何一个开区间至少含有 A 中一元. [数学考研竞赛00033]

3. 试证：$\{\cos n;n\in\mathbb{N}\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密. [数学考研竞赛00036]

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\nearrow$，$f(0)>0$，$f(1)<1$．试证：$\exists\ x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=x_0^2$．(福建师范大学) [数学考研竞赛00096]

5. 若 E 是非空有上界实数集. 设 $\sup E=a$，且 $a\notin E$．证明：存在数列 $\{x_n\},x_n\in E$，使得 $x_n<x_{n+1},n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．[数学考研竞赛00705]

6. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7},\cdots$$

的聚点. [数学考研竞赛00728]

7. 若 $f(x)$ 的图像关于 $x=a,x=b$, $a\neq b$ 对称, 证明: $f(x)$ 是周期函数. [数学考研竞赛00729]

8. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases},g(x)=x^2,\ -\infty<x<+\infty.$$

计算 $f(g(x))$, $g(f(x))$. [数学考研竞赛00836]

9. 设 $n\geqslant 2$, 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都大于 -1, 并且它们有着相同的符号. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

[数学考研竞赛00994]

10. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\geqslant 2)$ 都是正数, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$. 证明: (1) $\frac{1}{1-\sum_{k=1}^n a_k}>\prod_{k=1}^n(1+a_k)>1+\sum_{k=1}^n a_k$; (2) $\frac{1}{1+\sum_{k=1}^n a_k}>\prod_{k=1}^n(1-a_k)>1-\sum_{k=1}^n a_k$. [数学考研竞赛01036]

11. 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$. 证明 Chebychëv (切比雪夫, 1821̃1894) 不等式: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i\leqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

[数学考研竞赛01037]

12. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$g(n,i)\equiv\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^kk^i=\begin{cases}0, & 0\leqslant i\leqslant n-1\\ (-1)^nn!, & i=n\end{cases},\ n=1,2,\cdots.$$

[数学考研竞赛01151]

13. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的 C^1 函数. 如果 f 满足以下条件: @跟锦数学微信公众号

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(2x),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

证明: f 恒等于零. [数学考研竞赛01152]

14. ((Erdös 对均值不等式的简单证明))设 $a_i>0\ (i=1,\cdots,n)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

[数学考研竞赛01191]

15. 试证: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kz^{2^k}}{1+z^{2^k}}=\frac{z}{1-z}$, $\forall\ z:\ |z|<1$. [数学考研竞赛01192]

数列极限

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)$, 其中 $a>0$. 中山大学2019年 [数学考研竞赛00003]

2. 设 $\alpha\in(0,1)$, 试求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$. [数学考研竞赛00017]

3. 试求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$. [数学考研竞赛00018]

4. 定义数列 $\{a_n\}$ 的上下极限分别为 @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n=\inf_{n\geqslant1}\sup_{k\geqslant n}a_k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n=\sup_{n\geqslant1}\inf_{k\geqslant n}a_k.$$

试证: $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n$, 且当极限存在时, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n.$$

[数学考研竞赛00019]

5. 试证: 对正数列 $\{a_n\}$ 有 $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{a_n}=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n}$, $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{a_n}=\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n}$. [数学考研竞赛00020]

6. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为数列且 $\{a_n\}$ 收敛, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\ b_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}\ b_n.$$

[数学考研竞赛00021]

7. 设 @跟锦数学微信公众号

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \ (n \geqslant 1).$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1$. [数学考研竞赛00022]

8. 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ $(n \geqslant 1)$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(na_n - 2)}{\ln n} = \frac{2}{3}.$$

[数学考研竞赛00023]

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$. [数学考研竞赛00024]

10. (1) 证明方程 $\tan x = x$ 在 $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内存在实根 ξ_n, $n = 1, 2, \cdots$; (2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_{n+1} - \xi_n)$. [数学考研竞赛00025]

11. 设 $a_0 = \pi, \quad a_1 = \pi^2, \ a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 试证: $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛. [数学考研竞赛00026]

12. 已知 $a_0 > 0$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [数学考研竞赛00027]

13. 判断: 若对数列 $\{a_n\}$ 的任意两个子列 $\{a_{n_k}\}$ 与 $\{a_{m_k}\}$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k} - a_{m_k}) = 0$, 则$\{a_n\}$ 收敛.[数学考研竞赛00028]

14. 设 @跟锦数学微信公众号

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + \mathrm{e}^{-a_n} \ (n \geqslant 0).$$

再设 $b_n = a_n - \ln n$ $(n \geqslant 1)$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$0 < b_{n+1} < b_n, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

[数学考研竞赛00029]

15. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2016}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2017},$$

试求 x. [数学考研竞赛00030]

16. 设正数列 $\{a_n\}$ 适合 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{a_n}=1$, 试证: $\{a_n\}$ 收敛. [数学考研竞赛00034]

17. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n}=1$. [数学考研竞赛00050]

18. 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$. [数学考研竞赛00053]

19. 对 $a\in\mathbb{R}$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=\mathrm{e}^{-\frac{a^4}{2}}.$$

[数学考研竞赛00054]

20. 设 f 是 $[1,\infty)$ 上的非负单调减少函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

试证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛. [数学考研竞赛00055]

21. 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 为非负数列, 而且对任意 $k\geqslant 0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$a_{k+1}^2\leqslant(a_k+b_k)^2-\xi_k^2.$$

(1) 证明: $\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i^2\leqslant\left(a_1+\sum\limits_{i=0}^{k}b_i\right)^2$. (2) 若数列 $\{b_k\}$ 还满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k^2<\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i^2=0$. [数学考研竞赛00105]

22. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$. [数学考研竞赛00110]

23. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$ 的和. [数学考研竞赛00124]

24. 已知 $a_n>0$, $a_1<1$, $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛. [数学考研竞赛00127]

25. 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

[数学考研竞赛00150]

26. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

[数学考研竞赛00196]

27. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$. [数学考研竞赛00203]

28. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]$; [数学考研竞赛00207]

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$, 其中 $a>0,b>0,c>0$. [数学考研竞赛00208]

30. 设 $\varepsilon\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$x_0=a,x_{n+1}=a+\varepsilon\sin x_n\ \ (n=0,1,2,\cdots).$$

证明 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x-\varepsilon\sin x=a$ 的唯一根. [数学考研竞赛00215]

31. 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. [数学考研竞赛00223]

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$; [数学考研竞赛00240]

33. 对于任何实数 α , 求证: 存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

[数学考研竞赛00252]

34. 设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. [数学考研竞赛00256]

35. 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a,λ 为有限数, 求证: (1)、如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2)、如果存在正整数 p , 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

[数学考研竞赛00259]

36. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n=1,\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n<+\infty,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1$. [数学考研竞赛00267]

37. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$; [数学考研竞赛00288]

38. 设函数 $f(x)$ 满足条件: (1)、 $f:[a,b]\to[a,b]$, 其中 $-\infty<a<b<\infty$; (2)、存在常数 $0<L<1$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

设 $x_1\in[a,b]$, 令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在, 且 $f(x)=x$.[数学考研竞赛00300]

39. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶连续可微, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x, x\in(0,a)$. 令 $x_{n+1}=f(x_n), x_1\in(0,a)$. (1)、求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限; (2)、试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 求出其极限; 若不收敛, 请说明理由. [数学考研竞赛00317]

40. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$. [数学考研竞赛00321]

41. 设 $\alpha\in[0,1]$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}n^k a_n=0$, 其中 $k>0$. [数学考研竞赛00363]

42. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ____ . [数学考研竞赛00367]

43. 设 @跟锦数学微信公众号

$$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$. [数学考研竞赛00373]

44. 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n},\quad a_1>0.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-n)$ 存在. [数学考研竞赛00411]

45. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ ____ . [数学考研竞赛00414]

46. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!\mathrm{e})]$ 的值为 ____ . [数学考研竞赛00450]

47. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n= \_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00462]

48. 设 $n>1$ 为正整数. 令 @跟锦数学微信公众号

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

(1)、数列 $\{S_n\}$ 单调增且有界, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在. (2)、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. [数学考研竞赛00479]

49. 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$. (1)、证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在; (2)、记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=C$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性. [数学考研竞赛00503]

50. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ____ . [数学考研竞赛00511]

51. 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

[数学考研竞赛00519]

52. 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right].$$

[数学考研竞赛00549]

53. 设 $\alpha\in(0,1)$ ，则 $\lim_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=$ ____ . [数学考研竞赛00559]

54. 设 $c\in(0,1)$ ，$x_1\in(0,1)$ 且 @跟锦数学微信公众号

$$x_1\neq c(1-x_1^2), x_{n+1}=c(1-x_n^2)\ \ (n\geqslant 1).$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $c\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. [数学考研竞赛00576]

55. 设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1;$$

又设数列 $\{a_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$a_1\in(0,1), a_{n+1}=f(a_n)\ \ (n=1,2,\cdots),$$

严格单调减少且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 计算 $\lim_{n\to\infty}na_n^2$. [数学考研竞赛00596]

56. 设 $\delta>0$ ，$\alpha\in(0,1)$ ，实数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_{n+1}=x_n\left(1-\frac{h_n}{n^\alpha}\right)+\frac{1}{n^{\alpha+\delta}},\quad n\geqslant 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 是有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界. [数学考研竞赛00606]

57. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_1>0,\quad x_{n+1}=\ln(1+x_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限. [数学考研竞赛00610]

58. 设函数 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续凹函数, 满足 $f(a)=0, f(b)>0$ 且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处存在非零的右导数. 对 $n\geqslant 2$ ，记 @跟锦数学微信公众号

$$S_n=\left\{\sum_{i=1}^n kx_k;\sum_{k=1}^n kf(x_k)=f(b), x_k\in[a,b]\right\}.$$

(1)、证明对 $\forall\ \alpha\in(0,f(b))$ ，存在唯一 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)=\alpha$ ；(2)、求 $\lim_{n\to\infty}(\sup S_n-\inf S_n)$. [数学考研竞赛00613]

59. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. [数学考研竞赛00625]

60. 设 $a_i>0, i=1,2,\cdots,m$ ，其中 m 为正整数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

[数学考研竞赛00633]

61. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^{\frac{1}{n}}$. [数学考研竞赛00654]

62. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ ，证明以下结论: (1)、 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$ ；(2)、 $a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant a_{n-2}$ ；(3)、 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$. [数学考研竞赛00658]

63. 设 $\{a_n\}$ 有界并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$ ，证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. [数学考研竞赛00661]

64. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$. [数学考研竞赛00674]

65. 求: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+n^3}}{1+2+\cdots+n}$. [数学考研竞赛00725]

66. 设 $x_n=\cos^n\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ ，$n=1,2,\cdots$ ，求 $\inf\{x_n\}$ ，$\sup\{x_n\}$ ，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ ，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$. [数学考研竞赛00727]

67. 请叙述数列的单调有界定理. [数学考研竞赛00752]

68. 设 $f(x)$ 是定义在实数域上的压缩函数, 即, 对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足下列不等式: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{3}|x-y|.$$

设 $x_1=1, x_{n+1}=f(x_n), n\geqslant 2$. 证明: (1)、数列 $\{x_n\}$ 是一个柯西列. (2)、存在唯一的 $a\in\mathbb{R}$ ，使得 $a=f(a)$. [数学考研竞赛00759]

69. 设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ；[数学考研竞赛00780]

70. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n^3}$. [数学考研竞赛00807]

71. 设 $x_n=\int_0^1\sqrt{t^{2n}-t^{2n+2}}\,\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots$. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. [数学考研竞赛00811]

72. 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_m\sqrt{n+m}\right)=0,$$

其中 $a_0+a_1+\cdots+a_m=0$. [数学考研竞赛00814]

73. 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)\right].$$

[数学考研竞赛00822]

74. 设 $0<a_1<1$, $a_{n+1}=a_n(2-a_n)$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限. [数学考研竞赛00828]

75. 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}\right).$$

[数学考研竞赛00830]

76. 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+2\sqrt{n}}\right).$$

[数学考研竞赛00837]

77. 设 $x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2},\ n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. [数学考研竞赛00842]

78. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_1>0,\quad x_{n+1}=\ln(1+x_n),n=1,2,\cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限. [数学考研竞赛00870]

79. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=$ ____ . [数学考研竞赛00889]

80. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$. [数学考研竞赛00923]

81. 设 a 为正常数. (1)、证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. (2)、若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. [数学考研竞赛00925]

82. 设数列 $\{a_n\}$ 既无最大值, 也无最小值. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 发散. [数学考研竞赛00926]

83. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1^2}{n}}+\frac{1}{n+\frac{2^2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{n^2}{n}}\right)=$ ____ . [数学考研竞赛00939]

84. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e})$. [数学考研竞赛01038]

85. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$. [数学考研竞赛01040]

86. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的增函数. 再设 $x_0\in[a,b)$, 而点列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n>x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在. [数学考研竞赛01097]

87. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}+k}$. [数学考研竞赛01118]

88. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$. (1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求其极限; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$; (3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$; (4) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\frac{nx_n^2}{3}\right)$. [数学考研竞赛01122]

89. 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}.$$

[数学考研竞赛01159]

90. 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_{n+2}=\psi\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right),n\geqslant 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散. [数学考研竞赛01162]

91. 试求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right),\quad x>0.$$

[数学考研竞赛01175]

92. 无穷多个无穷小量相乘还是无穷小量么? [数学考研竞赛01176]

93. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n\sin^n x}$. (内蒙古大学) [数学考研竞赛01182]

94. 设 @跟锦数学微信公众号

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin^2 k}{n^2+k\sin^2 k}(n=1,2,\cdots).$$

求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛. [数学考研竞赛01185]

95. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$. [数学考研竞赛01188]

96. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n\geqslant 1.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$. [数学考研竞赛01207]

97. 试证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n!\mathrm{e}\pi)=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2n!\mathrm{e}\pi)=2\pi$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[n\sin(2n!\mathrm{e}\pi)-2\pi]=-\dfrac{2\pi(2\pi^2+3)}{3}$. [数学考研竞赛01226]

98. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n\right]=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$. [数学考研竞赛01227]

99. (1) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2};$$

(2) 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{n}{4}}n^{-\frac{n+1}{2}}\left(1^1\cdot 2^2\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n}}=1$. [数学考研竞赛01228]

100. 试证: 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=A$, 则对任意固定的整数 n_0 都有 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n_0+n}|}=a. \text{ (北京理工大学)}$$

[数学考研竞赛01229]

101. 证明: 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} c_n\leqslant c$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{1+|c_n|}\leqslant\frac{c}{1+|c|}.$$

[数学考研竞赛01230]

102.]给定正数列 $\{a_n\}$ ，证明 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}.\ (国外赛题)$$

[数学考研竞赛01231]

103. 设 $-1<a_0<1$ ，$a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}$，$(n>0)$ ．问极限 $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$ 是否存在？存在的话，求出极限值．[数学考研竞赛01249]

104. (1) 计算 Fibonacci 数列 F_n 的通项，其中 $F_1=F_2=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\ (n\geqslant 2)$ ．(2) 证明：$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n\ (n\geqslant 2)$ ．(3) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ ．(4) 试求 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{F_n^2}\right]$ ．[数学考研竞赛01250]

105. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$ ．[数学考研竞赛01258]

函数极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x-\tan\tan x}{x^3}$ ．华东师范大学2020数分 [数学考研竞赛00004]

2. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(2x-2t)\,\mathrm{d}t},$$

其中 $f(0)\neq 0$ ．中国科学技术大学2020数分 [数学考研竞赛00007]

3. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)>0$，试求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t},$$

其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距．[数学考研竞赛00031]

4. 试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}$．[数学考研竞赛00085]

5. 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^\alpha\int_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha>0$ ，$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数．[数学考研竞赛00107]

6. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]t\,\mathrm{d}t}{x^4}$. [数学考研竞赛00123]

7. 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt{\cos 2x}\cos x}{x-\ln(1+x)}.$$

[数学考研竞赛00128]

8. 求极限 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1+x}{\sin^2 x}}$. [数学考研竞赛00141]

9. 设 $s(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$. (1)、求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}$, (2)、问 $y=s(x)$ 是否有渐近线, 并说明理由. [数学考研竞赛00155]

10. 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=1.$$

则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$ ____ . [数学考研竞赛00160]

11. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数. [数学考研竞赛00185]

12. 求 $x\to 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量. [数学考研竞赛00191]

13. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义, 且在 $x=1$ 点可导, $f(1)=0, f'(1)=2$. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

[数学考研竞赛00209]

14. 求 $\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$. [数学考研竞赛00224]

15. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; [数学考研竞赛00239]

16. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}$. [数学考研竞赛00255]

17. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$. [数学考研竞赛00271]

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$. [数学考研竞赛00272]

19. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t$.[数学考研竞赛00292]

20. 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.[数学考研竞赛00295]

21. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right]$ ($a>1$). [数学考研竞赛00305]

22. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可导, @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.[数学考研竞赛00311]

23. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$ ____ . [数学考研竞赛00368]

24. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\,\mathrm{d}u}$ 的值是 ____ . [数学考研竞赛00397]

25. 若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在, 则极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00463]

26. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ____ . [数学考研竞赛00513]

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$ ____ . [数学考研竞赛00521]

28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$ ____ . [数学考研竞赛00530]

29. 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=$ ____ . [数学考研竞赛00542]

30. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ ____. [数学考研竞赛00562]

31. @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00615]

32. 计算极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt[x]{x}-1)}{\ln x}$. [数学考研竞赛00626]

33. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[2020]{x^{2020}+x^{2019}}-\sqrt[2020]{x^{2020}-x^{2019}}\right)$. [数学考研竞赛00675]

34. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t-e\right]\mathrm{d}t}{\ln x}$. [数学考研竞赛00676]

35. $\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\left(\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$. [数学考研竞赛00699]

36. 求 $\lim_{x\to 2020}\frac{2020^x-x^{2020}}{x-2020}$. [数学考研竞赛00730]

37. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=$ ____ . [数学考研竞赛00769]

38. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$ ____ . [数学考研竞赛00776]

39. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^3(e^x-1)}$; [数学考研竞赛00778]

40. 计算极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$. [数学考研竞赛00808]

41. 计算极限 $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}$. [数学考研竞赛00823]

42. 计算极限 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-x^3-1}{\sin^6 x}$. [数学考研竞赛00838]

43. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$.[数学考研竞赛00867]

44. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$. [数学考研竞赛00868]

45. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{\cos x-1}=$ ____ . [数学考研竞赛00890]

46. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$. [数学考研竞赛00919]

47. 设 $[x]$ 为 x 的最大整数部分, 则 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=$ ____ . [数学考研竞赛00934]

48. 设 $f:(-a,a)\setminus\{0\}\to(0,+\infty)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]=2.$$

试证: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$. [数学考研竞赛01010]

49. 设 $\alpha>0$, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$. [数学考研竞赛01011]

50. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

[数学考研竞赛01012]

51. 设 f 在 (a,b) 上单增, 试证: 对 $\forall\ x\in(a,b)$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x-0)=\sup_{y<x}f(y),\quad f(x+0)=\inf_{y>x}f(y)$$

存在. [数学考研竞赛01021]

52. 设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^n a_k\sin\sqrt{x+k}=0.$$

[数学考研竞赛01039]

53. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域连续, 且 $f(0)\neq 0$, 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x(\sin x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

[数学考研竞赛01086]

54. 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$ ____ . [数学考研竞赛01202]

55. 设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x\in U$, $f(x)\neq g(x)$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=a>0,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛01206]

56. 对任一实数 $\lambda>1$, 已 $f(\lambda)$ 表示方程 $x(1+\ln x)=\lambda$ 的实数根, 试证: $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda)\ln\lambda}{\lambda}=1$. [数学考研竞赛01244]

57. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\tan^2 x-(\mathrm{e}^x-1)^5}$. [数学考研竞赛01259]

58. (1) 用极限定义叙述 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$. (2) 证明 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{x}+1}\neq+\infty$. [数学考研竞赛01260]

连续

1. 证明: 若 f 在 x_0 处连续, 则 $|f|$ 在 x_0 处连续. 举例说明反之不成立. [数学考研竞赛00074]

2. 设 $h(t)$ 是 $[0,T)$ 上的连续函数, 适合 $\lim_{t\to T^-}h(t)=+\infty$. 再设 @跟锦数学微信公众号

$$H(t)=\max_{0\leqslant s\leqslant t}h(s),\quad 0\leqslant s<T.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ t_k\nearrow T,\ \text{s.t. } h(t_k)=H(t_k)\nearrow+\infty.$$

[数学考研竞赛00089]

3. 使用连续函数的介值定理证明: 对于平面上给定的一个三角形, 在任意方向上都存在一条直线, 能将三角形分成面积相等的两部分. [数学考研竞赛00108]

4. 定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}}, & \frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n}\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型. [数学考研竞赛00114]

5. 设 $x=0$ 是函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ \frac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$$

的可去间断点, 则常数 $a=$ ____ . [数学考研竞赛00159]

6. 设 $n>1$ 为整数, @跟锦数学微信公众号

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t.$$

证明: 方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根. [数学考研竞赛00212]

7. 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)-f(y)|<+\infty.$$

证明: 存在实常数 a 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-ax|<+\infty.$$

[数学考研竞赛00237]

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且存在两两互异的点 @跟锦数学微信公众号

$$x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1),$$

使得 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta,$$

证明: 对任意 $\lambda\in(\alpha,\beta)$, 存在互异的点 $x_5,x_6\in(0,1)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}.$$

[数学考研竞赛00547]

9. 设函数 @跟锦数学微信公众号

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续, 则 $a+b$ 的值为 ____ . [数学考研竞赛00591]

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x\in[0,1]$ 都有 $f(x)\in[0,1]$ ，求证存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $f(x_0)=x_0$. [数学考研竞赛00634]

11. 证明 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续. [数学考研竞赛00660]

12. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对 $\forall\, x\in[a,b]$ ，有 $f(x)>0$ ，则 $\exists\, r>0,\forall\, x\in[a,b]$ ，都有 $f(x)>r$. [数学考研竞赛00701]

13. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 的一致连续性. [数学考研竞赛00731]

14. 函数在区间 $[0,1)$ 连续, 则该函数在 $[0,1)$ 上一致连续. [数学考研竞赛00748]

15. 有界闭区间上连续函数一定一致连续. [数学考研竞赛00751]

16. 请用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 处不连续. [数学考研竞赛00753]

17. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)<g(a),f(b)>g(b)$. 求证存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=g(x_0)$. [数学考研竞赛00815]

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续且 $f(2)=f(4)$. 证明: 存在 $a,b\in[2,4]$ 使得 $b-a=1$ 且 $f(a)=f(b)$. [数学考研竞赛00829]

19. 设函数 f 在以 x_0 为内点的区间上有定义且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)]=0$ ，请判断 x_0 点是否为函数 f 的连续点, 若是则证明, 否则举例说明. [数学考研竞赛00843]

20. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, a 为常数. 试证: $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. [数学考研竞赛00903]

21. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上存在有界导数, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. [数学考研竞赛00946]

22. 设 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 以直线 $y=ax+b$ 为渐近线, 求证: $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续. [数学考研竞赛00972]

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义, 且 $g(0)>0$, $g(1)<0$, $f(x)+g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$. [数学考研竞赛00991]

24. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 均是连续的周期函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

试证: $f\equiv g$. [数学考研竞赛01027]

25. 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 一致连续, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0,\quad \forall\ x\geqslant 0.$$

试证: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. [数学考研竞赛01028]

26. 设 f 是从区间 $[0,1]$ 映到 $[0,1]$ 的函数, 其图像 @跟锦数学微信公众号

$$\{(x,f(x));\ x\in[0,1]\}$$

是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的闭子集. 证明: f 是连续函数. [数学考研竞赛01181]

微分

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有界, $|f'(x)|<1$. 证明存在 $M<1$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(0)|\leqslant M|x|,\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

[数学考研竞赛00001]

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 则对任意 $x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{2}(x-b)f''(\xi).$$

[数学考研竞赛00002]

3. 设 $f(x)$ 二次可导, $f(0)=f'(0)=f(1)=0$, 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+(4\xi^2+2)f(\xi)=0$. 江西师范大学2013高数 [数学考研竞赛00005]

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, 对于任意点 $x_0\in(0,1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=f(x_0)$. 河南大学2020年 [数学考研竞赛00006]

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可微, 且满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证: 在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$. [数学考研竞赛00008]

6. 若 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$. 兰州大学2020数分 [数学考研竞赛00009]

7. 证明恒等式 @跟锦数学微信公众号

$$\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

[数学考研竞赛00014]

8. 设 $f(x)=\dfrac{1+x\mathrm{e}^x}{1+x}$, 试求 $f^{(5)}(0)$. [数学考研竞赛00037]

9. 设方程 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 中的第 n 个解为 x_n. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

[数学考研竞赛00057]

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$, 其中 a 为常数. 如果 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2. 试证: $x_1x_2>\mathrm{e}^2$. [数学考研竞赛00066]

11. 设 $A=(a_{ij})$, 且定义 @跟锦数学微信公众号

$$\nabla_A f(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right).$$

试证: (1) $\nabla_A \mathrm{tr}\,(AB)=B^T$; (2) $\nabla_A \mathrm{tr}\,(ABA^TC)=CAB+C^TAB^T$. [数学考研竞赛00067]

12. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$. 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)+2\xi f'(\xi)=0$. [数学考研竞赛00069]

13. 举例说明: f 在 x_0 处可导, 但 $|f|$ 在 x_0 处不可导. 反之也不对. 证明: 如果 f 在 x_0 处连续, $|f|$ 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处可导. [数学考研竞赛00075]

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 试证: 在 $(0,1)$ 内存在不同的 λ , μ 使得 $f'(\lambda)[f'(\mu)+1]=2$. [数学考研竞赛00082]

15. 已知函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 计算 $f^{(i)}(0)$, $i=1,2,3$. [数学考研竞赛00084]

16. 设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f^{(2017)}(0)$ 的值. [数学考研竞赛00132]

17. 证明: $(\cos x)^p \leqslant \cos(px)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0<p<1$. [数学考研竞赛00135]

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$ 的值. [数学考研竞赛00143]

19. 已知 $P_n(x)$ 为 n 次实系数多项式, 有 n 个不同实根. 证明: $P_n(x)+P_n'(x)$ 有 n 个不同的实根. [数学考研竞赛00149]

20. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且 $\forall\ a>0,b>0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^{ab} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

求 $f(x)$ 的表达式. [数学考研竞赛00157]

21. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\geqslant 1,\\ \mathrm{e}^{3x}-1, & x<1,\end{cases}$$

令 $y=f\left(f(x)\right)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00161]

22. 设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+x^{2020}$, 则 $f^{(2020)}(x)=\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00163]

23. 方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-100}=0$$

的实根共有 $\underline{\qquad}$ 个. [数学考研竞赛00164]

24. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 过点 $A\left(0,f(0)\right)$, 与点 $B\left(1,f(1)\right)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C\left(c,f(c)\right)$, 其中 $0<c<1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi)=0$. [数学考研竞赛00180]

25. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2,$$

则 $f(x)=$ ____ . [数学考研竞赛00182]

26. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f'\neq 1$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00184]

27. 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性. [数学考研竞赛00186]

28. 若关于 x 的方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ $(k>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一实数解, 则常数 $k=$ ____ . [数学考研竞赛00193]

29. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

证明: (1)、存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$; (2)、存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$. [数学考研竞赛00211]

30. 是否存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f\left(f(x)\right)=1+x^2+x^4-x^3-x^5?$$

若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明. [数学考研竞赛00213]

31. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x,y)$ 在 D 上连续. 注: 函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是 $\forall\ \alpha\in(0,1)$ 以及 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\right)\leqslant\alpha f(x_1,y_1)+(1-\alpha)f(x_2,y_2).$$

[数学考研竞赛00217]

32. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根. [数学考研竞赛00228]

33. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)},$$

其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与 @跟锦数学微信公众号

$$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 $t=1$ 处相切. 求函数 ψ . [数学考研竞赛00229]

34. 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}), \\ y=t-\arctan \mathrm{e}^t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. [数学考研竞赛00241]

35. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0),f'(0),f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3 , 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

[数学考研竞赛00243]

36. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0.$$

求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f'''(x_0)=3$. [数学考研竞赛00260]

37. 设 $k_0<k_1<\cdots<k_n$ 为给定的正整数, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为实参数. 指出函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\sin k_0x+A_1\sin k_1x+\cdots+A_n\sin k_nx$$

在 $[0,2\pi)$ 上零点个数的 (当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 变化时的) 最小可能值并加以证明. [数学考研竞赛00266]

38. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 并且满足: 存在 $M>0$, 使得

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M, \forall\ x \in(-\infty,+\infty), \ (k=1,2,\cdots),$$

且 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0, \ (n=1,2,\cdots)$. 求证: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $f(x) \equiv 0$. [数学考研竞赛00277]

39. 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001 .[数学考研竞赛00294]

40. 设 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数. 对 $x_0 \in(a,b)$, 若存在 x_0 的领域 U 使得对任意的 $x \in U \backslash\{x_0\}$ 都有 $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点; 类似地, 若存在 x_0 的领域 U 使得对任意的 $x \in U \backslash\{x_0\}$ 都有 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 求证: 若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的二次可微函数, 且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.[数学考研竞赛00302]

41. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)|<1$, 又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 试证在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.[数学考研竞赛00312]

42. 设 $a>1$, $f:(0,+\infty) \rightarrow(0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于 $+\infty$ 的正数列 $\{x_n\}$, 使得 $f'(x_n)<f(ax_n), \ n=1,2,\cdots$. [数学考研竞赛00318]

43. 设 $f(x,y)$ 为 $[a,b] \times \mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足

$$y'=f(x,y), \quad z' \leqslant f(x,z), \quad x \in[a,b].$$

已知 $z(a) \leqslant y(a)$. 求证: $z(x) \leqslant y(x), \ x \in[a,b]$. [数学考研竞赛00334]

44. 对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geqslant 2$ 为自然数. 求最大实数 C , 使得对任何所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$ 都有 $d(f') \geqslant C d(f)$. [数学考研竞赛00336]

45. 对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geqslant 2$ 为自然数. 求最大实数 C , 使得对任何所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$ 都有 $d(f') \geqslant C d(f)$. [数学考研竞赛00340]

46. 设 $f \in C^4(-\infty, +\infty)$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,$$

其中 θ 是与 x, h 无关的常数, 证明 f 是不超过三次的多项式. [数学考研竞赛00352]

47. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零. 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leqslant af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立. (1)、求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$; (2)、求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leqslant cf(x)$. (3)、求使上面不等式成立的最小常数 c . [数学考研竞赛00361]

48. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$ 所确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$ ____ . [数学考研竞赛00366]

49. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二次可导, 且存在常数 α, β , 使得对于 $\forall\ x \in (a, b)$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a, b) 内无穷次可导. [数学考研竞赛00420]

50. 设 $f(t)$ 二阶连续可导, 且 $f(t) \neq 0$, 若 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \\ y = f(t), \end{cases}$$

则 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} =$ ____ . [数学考研竞赛00448]

51. 设 $f(x) = \mathrm{e}^x \sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0) =$ ____ . [数学考研竞赛00465]

52. 设 a 为实数, 关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a = 0$$

有虚根的充分必要条件是 a 满足 ____ . [数学考研竞赛00473]

53. 设 a 为实数, 关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a = 0$$

有虚根的充分必要条件是 a 满足 ____ . [数学考研竞赛00482]

54. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$，证明: 在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3，使得 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right]x_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).\end{aligned}$$

[数学考研竞赛00548]

55. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0\ (\forall\ n\geqslant 0)$，且存在常数 $C>0$ 使得 $|xf'(x)|\leqslant C|f(x)|,\ \forall\ x\in[0,1]$. 证明: (1)、$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^n}=0\ (\forall\ n\geqslant 0)$; (2)、在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$. [数学考研竞赛00556]

56. 设 $y(x)\in C^1[0,1)$ 满足 $y(x)\in[0,\pi]$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{cases}\dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y\in(0,\pi],\\ 1, & y=0.\end{cases}$$

则 $y'(0)=$ ____ . [数学考研竞赛00570]

57. 设 $\alpha>0, f(x)\in C^1[0,1]$，且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|x^\alpha f'(x)|\leqslant C|f(x)|\ \ (\forall\ x\in[0,1]).$$

证明: (1)、若 $\alpha=1$，则在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$. (2)、若 $\alpha>1$，举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$ 可以不成立. [数学考研竞赛00575]

58. 设 $y(x)\in C^1[0,1)$ 满足 $y(x)\in[0,\pi]$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{cases}\dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y\in(0,\pi],\\ 1, & y=0.\end{cases}$$

则 $y'(0)=$ ____ . [数学考研竞赛00579]

59. 设 $\alpha>0, f(x)\in C^1[0,1]$，且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|x^\alpha f'(x)|\leqslant C|f(x)|\ \ (\forall\ x\in[0,1]).$$

证明: (1)、若 $\alpha=1$,则在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$. (2)、若 $\alpha>1$,举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$ 可以不成立. [数学考研竞赛00584]

60. 设 $\alpha>0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0)=0$, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\xi f''(\xi)+(\alpha+1)f'(\xi)>\alpha f(\xi).$$

[数学考研竞赛00603]

61. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. (1)、证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步证明当 $x,y\geqslant 0$ 时成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)+f(y)\leqslant f(0)+f(x+y).$$

(2)、设 $n\geqslant 3$, 试确定集合 @跟锦数学微信公众号

$$E=\left\{\sum_{k=1}^n f(x_k);\sum_{k=1}^n x_k=0,x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

[数学考研竞赛00607]

62. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$$

在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$. [数学考研竞赛00621]

63. 设函数 $f(x)$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上连续且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=3x+\int_0^x(t-x)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $f^{(2019)}(0)$ 的值. [数学考研竞赛00627]

64. 设 $k\in\mathbb{R}$, 试问 k 为何值时, 方程 $\arctan x-kx=0$ 无正实根. [数学考研竞赛00682]

65. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)+f(1)+f(2)=3,f(0)\neq 1,f(3)=1,$$

证明: 存在 $\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$. [数学考研竞赛00686]

66. 若函数 $f(x)$ 可导, 则其导函数 $f'(x)$ 不存在第二类间断点. [数学考研竞赛00702]

67. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

证明: 在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi)=0$. [数学考研竞赛00704]

68. $\dfrac{\mathrm{d}^{2020}\left[\mathrm{e}^{2019x}\sin(2018x+2017)\right]}{\mathrm{d}x^{2020}}$. [数学考研竞赛00726]

69. 如果函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可微. [数学考研竞赛00749]

70. 计算 $(\cos^2 x)^{(2019)}$, 其中 2019 表示 2019 次导数. [数学考研竞赛00754]

71. 设 $0<b\leqslant a$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}.$$

[数学考研竞赛00757]

72. 设 $f(x)$ 是定义在实数域上的可导正函数, 并且 $f'(x)=2020f(x)$, $f(0)=1$, 求 $f(x)$. [数学考研竞赛00758]

73. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\sin at \\ y=\cos bt \end{cases}$ 所确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ ____ . [数学考研竞赛00770]

74. 设 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$, 证明: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根. [数学考研竞赛00783]

75. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^5\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 计算 f 在 $x=0$ 处的二阶导数 $f''(0)$. [数学考研竞赛00809]

76. 设 $y=\dfrac{(x+2)^2(x-4)^4}{(x+3)^3(x-5)^5}$, 其中 $x>5$, 求 y' . [数学考研竞赛00824]

77. 设 $g(0)=g'(0)=0$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$

求 $f'(0)$. [数学考研竞赛00839]

78. 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性. [数学考研竞赛00871]

79. 设函数 $f(x)=(x^3-3x+2)^n\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=2$ 点的邻域内有 $n-1$ 阶的连续导数. 证明: $f^{(n-1)}(2)=0$ 且 $f^{(n)}(2)=n!\cdot\varphi(2)$. [数学考研竞赛00872]

80. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且满足 $|f''(x)|\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1)$. 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取得极值 $\frac{1}{4}$. 证明: $|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1$. [数学考研竞赛00875]

81. 若点 $(0,1)$ 是 $y=x^3+bx^2+c$ 的拐点, 则 b,c 所满足的条件为 ____ . [数学考研竞赛00891]

82. 设 $y=\arccos\frac{1}{|x|}$, 求 $\mathrm{d}y$. [数学考研竞赛00921]

83. 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. [数学考研竞赛00927]

84. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶导数, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界, 证明: 存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\xi)=0$. [数学考研竞赛00929]

85. 若 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ ax-a, & x>1\end{cases}$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 则常数 $a=$ ____ . [数学考研竞赛00933]

86. 设 $f(x)=\arctan x$, 则 $f^{(2n)}(0)=$ ____ , 其中 n 为正整数. [数学考研竞赛00936]

87. 可导的偶函数的导函数为奇函数, 可导的奇函数的导函数为偶函数. [数学考研竞赛00944]

88. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, $f'(a)=f'(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(f(b)-f(a)|.$$

[数学考研竞赛00947]

个值定理 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 则 $\exists\ \xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)<0$. [数学考研竞赛00967]

89. 设 $f(x)$ 在 a 点处具有直到 n 阶的导数, $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$, 证明: (1) 当 n 为奇数时, $f(a)$ 不是极值; (2) 当 n 为偶数时, $f(a)$ 是极值, 并指出什么时候是极大值, 什么时候是极小值. [数学考研竞赛00977]

90. 设常数 $0<c<1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(cx)}{x}=A$ 存在且有限, 求证: $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 并证明: $f'(0)=\dfrac{A}{1-c}$. [数学考研竞赛00980]

91. 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $\varphi(y)$, 写出用 f',f'',f''' 表示 φ', φ'', φ''' 的表达式. [数学考研竞赛01003]

92. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,\quad x>1.$$

[数学考研竞赛01023]

93. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\arctan a-\arctan b>\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},\quad \forall\ a>b>0.$$

[数学考研竞赛01055]

94. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1)=3\int_0^{1/3}\mathrm{e}^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$. [数学考研竞赛01101]

95. 设 $f(x)=x^2\ln(x+1)$, 求 $f^{(n)}(0)$. [数学考研竞赛01120]

96. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 又 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

单调递减. 证明: $f\equiv 0$. [数学考研竞赛01123]

97. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 证明: 对于任意的实数 λ , 一定存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(\xi)-\lambda f(\xi)+\lambda f(\xi)=1.$$

[数学考研竞赛01127]

98. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\bar{D}^{+}f(x)=\overline{\lim_{y\to x^{+}}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geqslant 0,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

试证: $f(a)\leqslant f(b)$. [数学考研竞赛01136]

99. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$, 则对 $\forall\ x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

[数学考研竞赛01147]

100. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 试证: 对任意 $c\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

[数学考研竞赛01148]

101. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)<f(b)$, 又设对一切 $x\in(a,b)$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$$

存在, 用 $g(x)$ 表示这一极限值. 试证: 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)\geqslant 0$. (南开大学) (注意题目未假定导数存在) [数学考研竞赛01150]

102. 设 $f\in C^{n+1}(\mathbb{R})$, 试证: 对 $\forall\ a\in\mathbb{R}$, @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]_{x=a}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

[数学考研竞赛01154]

103. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ \xi\in(a,b),\ \text{s.t.}\ f'(\xi)(\xi-a)=f(\xi)-f(a).$$

[数学考研竞赛01172]

104. 设函数 $f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1)=$ ____ . [数学考研竞赛01203]

105. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明: (1)、存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=2-3x_0$; (2)、存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 且 $\xi\neq\eta$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[1+f'(\xi)]\,[1+f'(\eta)]=4.$$

[数学考研竞赛01208]

106. 设函数 $g(x)$ 非负连续, 且存在正数 a 使得 @跟锦数学微信公众号

$$g(x)+a\int_{x-1}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t=A.$$

(1)、求证: $g(x)$ 可导; (2)、令 $F(x)=\mathrm{e}^{ax}g(x)$, 证明 $F(x)$ 为增函数; (3)、求证: $g(x)\geqslant A\mathrm{e}^{-a}$; (4)、给出 $g(x)$ 恒为常数的一个充分条件. [数学考研竞赛01243]

107. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的凸函数, 试证: $f(x+f'(x))\geqslant f(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. [数学考研竞赛01245]

108. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)$. 试证: $\forall\ \lambda\in\mathbb{R},\ \exists\ \xi\in(a,b),\ \text{s.t.}\ f''(\xi)-\lambda[f'(\xi)]^2=0$. [数学考研竞赛01246]

109. 设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, 试证: $P_{2n+1}(x)$ 有唯一实根. [数学考研竞赛01253]

微分法与不等式

1. 试证: 当 $0<x<1$ 时, $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$. [数学考研竞赛00086]

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且存在正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$. 证明: 对任意 $x\in[0,1]$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

[数学考研竞赛00370]

3. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求最大常数 α 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty.$$

[数学考研竞赛00380]

4. 设 $a(t),f(t)$ 为实连续函数, $\forall\ t\in\mathbb{R}$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$f(t)>0,a(t)\geqslant 1,\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\quad \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界. [数学考研竞赛00381]

5. 设 $a(t),f(t)$ 为实连续函数, $\forall\ t\in\mathbb{R}$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$f(t)>0,a(t)\geqslant 1,\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\quad \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界. [数学考研竞赛00390]

6. 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi.$$

[数学考研竞赛00430]

7. 设 $a(t),f(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $a(x)>0$. 已知 $\int_0^{\infty}a(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a(x)}=0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$y'(x)+a(x)y(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$. [数学考研竞赛00431]

8. 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi.$$

[数学考研竞赛00439]

9. 设 $\alpha>1$. 求证不存在 $[0,+\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)\geqslant f^{\alpha}(x),x\in[0,+\infty).$$

[数学考研竞赛00460]

10. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}.$$

[数学考研竞赛00499]

11. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha}$, 其中 $\alpha\in(0,1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

[数学考研竞赛00558]

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$. [数学考研竞赛00624]

13. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant M_0,|f''(x)|\leqslant M_1.$$

证明: $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}$. [数学考研竞赛00907]

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=f(1)$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且对一切 $x\in[0,1]$ 都有 $f'(x)\neq 1$, 记 $g(x)=f(x)-x$, $n\geqslant 2$ 为正整数, 求证: (1) $g(x)$ 在 $[0,1]$

上严格单调递减; (2) $-\frac{n}{2}<\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)<-\frac{n}{2}+1$; (3) $\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}$. [数学考研竞赛00968]

15. 设 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $x \in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)| \leqslant M_0$, $|f''(x)| \leqslant M_1$, 证明: $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2 M_0 M_1}$. [数学考研竞赛00978]

16. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |f''(x)| \leqslant B, \quad \forall\ x \in[a, b],$$

并且 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ x_0 \in[a, b], \text{ s.t. } |f'(x_0)| \leqslant D.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)| \leqslant 2 \sqrt{A B}+D, \quad \forall\ x \in[a, b].$$

[数学考研竞赛01044]

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M_n, \quad (M_0, M_n \text{ 为常数}).$$

求证: (1) $f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界; (2) $|f^{(k)}(x)| \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$ $k \leqslant n)$. [数学考研竞赛01077]

18. 证明不等式: @跟锦数学微信公众号

$$1+x \ln \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}, \quad x>0.$$

[数学考研竞赛01121]

19. 设 $f(x)$ 二阶连续可导, $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x)=2$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant 1} f''(x) \leqslant-16.$$

[数学考研竞赛01131]

20. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^{\frac{1}{\ln 2}} \ln \left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln (1+x)}>1, \quad x>1.$$

[数学考研竞赛01135]

21. 设 f 在 $[0,c]$ 上连续, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,c)$ 时, $f''(x)<0$. 试证: 当 $0<a<b<a+b<c$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

[数学考研竞赛01149]

22. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b),\forall\ a,b>0.$$

[数学考研竞赛01171]

23. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是可微函数, 且存在 $L>0$, 使得 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant L|x-y|$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. 试证: $[f'(x)]^2<2Lf(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. [数学考研竞赛01235]

24. 设 $a,b>0$, $x,c>1$, 试证: $x^{a^c}+x^{b^c}\geqslant 2x^{(ab)^{c/2}}$. [数学考研竞赛01247]

不定积分

1. 试求 $\displaystyle\int\frac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00035]

2. 试求 $\displaystyle\int\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00060]

3. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00111]

4. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$. [数学考研竞赛00119]

5. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00142]

6. 求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int(1+x^n)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,\mathrm{d}x,$$

其中 n 为正整数. [数学考研竞赛00151]

7. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=x\arctan x+C,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\int \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00165]

8. 已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x},$$

求 $f(x)$. [数学考研竞赛00206]

9. 求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int \left(1+x-\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00274]

10. 求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$, 使 $f(x)=\mathrm{e}^{-u(x)}$, 其中 $u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. [数学考研竞赛00307]

11. 计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00308]

12. 不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_$. [数学考研竞赛00400]

13. 不定积分 $I=\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_$. [数学考研竞赛00514]

14. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \_\_\_\_$. [数学考研竞赛00561]

15. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00616]

16. 计算不定积分 $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00628]

17. 求积分 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00677]

18. 求 $\int \frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00733]

19. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\cos x}{x}$, 则 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x=$ ____ . [数学考研竞赛00772]

20. 求不定积分 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+1}$; [数学考研竞赛00777]

21. 求不定积分 $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00810]

22. 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00825]

23. 设 $P_3(x)=x^3+4x^2+5$, (1) 计算 $P_3(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒公式; (2) 计算积分 $\int \frac{P_3(x)}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00840]

24. $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00918]

25. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x=$ ____ . [数学考研竞赛00935]

定积分

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号
$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$
证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2 , 使得 @跟锦数学微信公众号
$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$
第8届全国大学生数学竞赛非数学类预赛试题 [数学考研竞赛00010]

2. 计算曲线 @跟锦数学微信公众号
$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2\geqslant a^2$$
所围成的面积. [数学考研竞赛00015]

3. 加强形式的积分第一中值定理: 中值定可在开区间内取得 @跟锦数学微信公众号
$$f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续}$$
$$\Rightarrow\exists\ \xi\in(a,b),\ \text{s.t.}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

[数学考研竞赛00032]

4. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)+s}}=2\int_0^{\pi}\frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)+s}},\quad s>0.$$

[数学考研竞赛00062]

5. 试求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00068]

6. 证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 举例说明反之不成立. [数学考研竞赛00076]

7. 求定积分 $\int_0^{\pi}\cos(\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00112]

8. 求定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00120]

9. 已知 $f(x)$ 连续且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求积分 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00133]

10. 设 $0<\alpha<1$, 求积分 $\int_0^1 f(t^\alpha)\,\mathrm{d}t$ 的上确界, 其中连续函数 f 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 1.$$

[数学考研竞赛00140]

11. 求定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1\frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2+(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00152]

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)\neq 0$. (1)、证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi).$$

(2)、对 (1) 中的 ξ , 求 $\lim\limits_{b\to a^+}\frac{\xi-a}{b-a}$. [数学考研竞赛00167]

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 由积分中值公式有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x-a)f(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant x<b).$$

若导数 $f'_+(a)$ 存在且非零, 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}$ 的值等于 ____ . [数学考研竞赛00194]

14. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, $0\leqslant f\leqslant 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\ [\alpha,\beta]\subset[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_\alpha^\beta[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

[数学考研竞赛00221]

15. 是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\leqslant 1,\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 1?$$

请说明理由. [数学考研竞赛00247]

16. 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 其线密度为 ρ . 在点 $(0,h)$ (其中 $h>0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力. [数学考研竞赛00261]

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两阶导数, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,\forall\ x\in[a,b].$$

[数学考研竞赛00265]

18. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微, 其中 $\mathbb{R}$ 为实数集. 已知 $f(0)=f(1),\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f'(x)\neq 1$. 求证: 对任意正整数 n , 有 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

[数学考研竞赛00286]

19. 令 $\mathbb{R}$ 为实数域, n 为给定的正整数, A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合.证明: @跟锦数学微信公众号

$$\inf_{b\in\mathbb{R},\ c>0,\ P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x>0.$$

[数学考研竞赛00304]

20. 设曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leqslant z \leqslant 2,$$

其面密度为常数 ρ . 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力 (记引力常数为 G).[数学考研竞赛00310]

21. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ ($x \geqslant 0$) 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求点 A 的坐标. [数学考研竞赛00324]

22. 计算定积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan \mathrm{e}^x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00325]

23. 设 n 为正整数, 计算 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| \mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00369]

24. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) + a \int_{x-1}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$$

为常数. 求证: $f(x)$ 为常数. [数学考研竞赛00413]

25. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$xf(x) = 2 \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t + \frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$. [数学考研竞赛00432]

26. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \neq 0.$$

证明在 $(0, 1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2 , 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}.$$

[数学考研竞赛00470]

27. 曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^2+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转生成的旋转曲面的面积为 ____ . [数学考研竞赛00498]

28. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1,$$

则 $f(x)=$ ____ . [数学考研竞赛00510]

29. 定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00617]

30. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且满足 $f(x)=\ln x-\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x$, 计算积分 $\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00845]

31. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=$ ____ . [数学考研竞赛00897]

32. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00920]

33. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $f(x)\geqslant c>0$, 试证: $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. [数学考研竞赛00982]

34. 设 $f\in C^2[0,\pi]$, 且 $f(\pi)=2$, $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$. 求 $f(0)$. [数学考研竞赛01105]

35. 设 $n\in\mathbb{N}^+$, 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛01107]

36. 令 $B(m,n)=\sum_{k=0}^n C_n^k\frac{(-1)^k}{m+k+1}$, $m,n\in\mathbb{N}^+$. (1) 证明 $B(m,n)=B(n,m)$; (2) 计算 $B(m,n)$. [数学考研竞赛01108]

37. 试求 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛01195]

38. 证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$. [数学考研竞赛01211]

积分法与不等式

1. 积分形式的 Jensen 不等式设函数 φ 在区间 $[0,a]$ 上连续, 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f''(x)\geqslant 0,\quad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t.$$

[数学考研竞赛00012]

2. 试证: 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ 在 $x>0$ 时严格单调减少, 且成立 $\frac{x}{x^2+1}<f(x)<\frac{1}{x}$. [数学考研竞赛00038]

3. 设 f 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

[数学考研竞赛00039]

4. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的非负函数, 适合 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x=1,\ \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x=0,\ \int_{\mathbb{R}} x^2f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$x>0\Rightarrow\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{x^2}{1+x^2};\quad x<0\Rightarrow\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

[数学考研竞赛00040]

5. 设 $M \geqslant 1$ 是一正数, μ 是一个概率测度, 试证: 对 $0 \leqslant f \leqslant M$, 有 @跟锦数学微信公众号
$$\left|\ln \int f \,\mathrm{d}\mu - \int \ln f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \frac{M \|g\|_{L^2}}{\|f\|_{L^1}},$$
其中 $g = \ln f - \int \ln f \,\mathrm{d}\mu$. [数学考研竞赛00041]

6. 设 $0 < F \in C[a,b]$ 单调减少, 试证: @跟锦数学微信公众号
$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b xF^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b xF(x)\,\mathrm{d}x.$$
[数学考研竞赛00045]

7. 设 $[a,b]$ 上的函数 f,g 适合 @跟锦数学微信公众号
$$[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)] \geqslant 0, \quad \forall\ x,y \in [a,b].$$
又设 $0 < p \in \mathcal{R}[a,b]$, 试证: @跟锦数学微信公众号
$$\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
[数学考研竞赛00046]

8. 设 $f \in C[0,1]$ 适合 $0 \leqslant f < 1$, 试证: @跟锦数学微信公众号
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$
[数学考研竞赛00048]

9. 设 $f \in C^{2n}[a,b]$ 适合 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0,\ k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 试证: @跟锦数学微信公众号
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|.$$
[数学考研竞赛00051]

10. 设 $f(r,z): \Omega = (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 适合 @跟锦数学微信公众号
$$r^3 f \in L^1(\Omega), \quad rf \in L^1(\Omega), \quad f \in L^\infty(\Omega).$$
试证: @跟锦数学微信公众号
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z \int_1^\infty |f| \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}r \lesssim \|r^3 f\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|rf\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$
[数学考研竞赛00064]

11. 设 $f\in C^2[0,1]$ 适合 $f(0)=f(1)=0,\ f\not\equiv 0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant \frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x,\quad \forall\ x\in[0,1].$$

[数学考研竞赛00070]

12. (1) 函数 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $u'(x)$ 绝对可积. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in[0,1]}|u(x)|\leqslant\int_0^1|u(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|u'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2) 二元函数 $u(x,y)$ 在 $\Omega=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上连续, 且偏导数 u_x,u_y,u_{xy} 绝对可积. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{(x,y)\in\Omega}|u(x)|\leqslant\iint_{\Omega}|u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Omega}|u_x|+|u_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Omega}|u_{xy}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛00109]

13. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

[数学考研竞赛00136]

14. 已知 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足 $\lim\limits_{t\to0^+}\varphi(t)=+\infty$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=a<+\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}[\varphi(t)]^2\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(t)]^2\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.$$

[数学考研竞赛00222]

15. 设 $0<f(x)<1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

[数学考研竞赛00234]

16. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00249]

17. 求最小实数 C , 使得对满足 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 $f(x)$, 都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant C$.[数学考研竞赛00296]

18. 设 $f: [-1,1 \to \mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0,1]$ 上是增函数; 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即 @跟锦数学微信公众号

$$g(tx + (1-t)y) \leqslant tg(x) + (1-t)g(y), \quad \forall\ x, y \in [0,1], \quad \forall\ t \in [0,1].$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00319]

19. 设 $|f(x)| \leqslant \pi, f'(x) \geqslant m > 0\ (a \leqslant x \leqslant b)$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}.$$

[数学考研竞赛00327]

20. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0) = 0$, $f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha > 1$, $\int_0^{\infty} f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty} f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta}, \quad \beta = \frac{\alpha+1}{2}.$$

[数学考研竞赛00335]

21. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0) = 0$, $f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha > 1$, $\int_0^{\infty} f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty} f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta}, \quad \beta = \frac{\alpha+1}{2}.$$

[数学考研竞赛00339]

22. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

取得最小值. [数学考研竞赛00349]

23. 设当 $x > -1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

且 $f(0) = 1$. 试证: 当 $x \geqslant 0$ 时, 有 $\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$ 成立. [数学考研竞赛00353]

24. 设 @跟锦数学微信公众号

$$D = \{(x,y); 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}, I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数. 若对任何 x,y 有 $f(0,y) = f(x,0) = 0$ 且 $f''_{xy} \leqslant A$. 证明 $I \leqslant \dfrac{A}{4}$. [数学考研竞赛00354]

25. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x - x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数. [数学考研竞赛00382]

26. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求最大常数 α 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$

[数学考研竞赛00389]

27. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

试证: (1)、 $\exists\ x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$; (2)、 $\exists\ x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$. [数学考研竞赛00422]

28. 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 中正连续函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

设 @跟锦数学微信公众号

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},n=1,2,\cdots.$$

求证: 数列 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots$$

单调递增且收敛. [数学考研竞赛00459]

29. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调递增函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant f(x),g(x)\leqslant 1,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

求证: $\int_0^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}$. [数学考研竞赛00461]

30. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1),0<f'(x)<1$. 试证: 当 $a\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00467]

31. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0,f(1)=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

[数学考研竞赛00469]

32. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \text{ 且 } \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明: 当 $0 \leqslant x \leqslant 13$ 时, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11,$$

并给出取等号的条件. [数学考研竞赛00500]

33. 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

证明: $\forall\ a,b,a<b$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}.$$

[数学考研竞赛00518]

34. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00526]

35. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00535]

36. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}.$$

[数学考研竞赛00564]

37. 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00567]

38. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00636]

39. 证明: 对 $x\geqslant 0$, 函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$$

有一个上界 $\dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)}$. [数学考研竞赛00687]

40. 证明不等式 $1\leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}$. [数学考研竞赛00869]

41. 设 $0<p<1$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

[数学考研竞赛00963]

42. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, $f\in C^1(D)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_D |f(x,y)-f(0,0)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D \frac{\sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛01001]

43. 设 f 在 $[-1,1]$ 上可导, $M=\sup|f'|$. 若 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ a\in(0,1),\ \text{s.t.}\ \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M(1-a^2).$$

[数学考研竞赛01032]

44. 设 f 在 $[0,2]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(2)=1$. 若 $|f'|\leqslant 1$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3.$$

[数学考研竞赛01033]

45. 设 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0$, $f'(1)=1$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4,$$

并指出不等式中等号成立的条件. [数学考研竞赛01034]

46. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数, 满足 $f(0)=f(1)=0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$, 其中 A 是常数. [数学考研竞赛01071]

47. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续正函数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f^2(t) \leqslant 1+2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

证明: $f(t) \leqslant 1+t$. [数学考研竞赛01102]

48. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 找出满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,\quad \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = a,\quad \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a^2$$

的所有 f , 其中 a 为给定实数. [数学考研竞赛01104]

49. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减, 证明: 对于任何 $\alpha\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛01128]

50. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶连续可导, $f(a)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛01130]

51. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}.$$

[数学考研竞赛01165]

52. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x\in[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\int_{x^2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^2-x^4}{2}.$$

证明: $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{10}$. [数学考研竞赛01169]

53. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(0)| \leqslant 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛01190]

54. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=f(1)=0$, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 为常数. [数学考研竞赛01193]

55. 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微凹函数, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=\alpha>0$, $f'(b)=\beta<0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

[数学考研竞赛01194]

56. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$1=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证: $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4$. [数学考研竞赛01238]

57. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续且递增, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant 2\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛01239]

58. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 三阶可导, 且 $f'''(x)\geqslant 0,\ \forall\ x\in[0,1]$; $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$10\int_0^1 x^3f(x)\,\mathrm{d}x+6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 15\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛01251]

59. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, 又存在常数 M , 使得在 $[a,b]$ 上恒有 $|f''(x)|\leqslant M$, 试证: 在 $[a,b]$ 上恒有 $|f(x)|\leqslant\frac{M}{16}(b-a)^2$. [数学考研竞赛01252]

60. (1) 求 $I(\alpha)=\int_0^1|\alpha x-1|\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上的最小值. (2) 设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant\sqrt{2}+1$. [数学考研竞赛01255]

积分与极限

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

第8届全国大学生数学竞赛非数学类预赛试题 [数学考研竞赛00011]

2. 设 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1 g(x)\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}g(0^+).$$

中国科学技术大学2020数分 [数学考研竞赛00013]

3. 设函数 $f,g\in C[a,b]$ 适合 $f(x)\neq 0,\ g>0$. 记 @跟锦数学微信公众号

$$d_n=\int_a^b|f(x)|^ng(x)\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

试证: 数列 $\left\{\frac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限. [数学考研竞赛00052]

4. 设 $n\in\mathbb{N}_+$, $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}$. [数学考研竞赛00063]

5. 证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty} R^\lambda\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$. [数学考研竞赛00072]

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$$

[数学考研竞赛00118]

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 无穷积分 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00210]

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0, f'(1)=a$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^nf(x)\,\mathrm{d}x=-a.$$

[数学考研竞赛00218]

9. 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0.$$

证明: (1)、 $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$, (2)、 $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t=0$. [数学考研竞赛00254]

10. 设 $F(x),G(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个非负单调递减函数, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[F(x)+G(x)\right]=0.$$

(1)、证明: $\forall\ \varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

(2)、若进一步有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}[F(t)-G(t)]\cos\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0.$$

证明: $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{+\infty}[F(t)-G(t)]\cos(xt)\,\mathrm{d}t=0$. [数学考研竞赛00270]

11. 求解微分方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$ (2)、如 $y=f(x)$ 为上述方程的解, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

[数学考研竞赛00280]

12. 设 $f\in C[0,1]$ 是非负的严格递增函数. (1)、证明: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n\in[0,1]$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[f(x_n)]^n=\int_0^1[f(x)]^n\,\mathrm{d}x.$$

(2)、证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. [数学考研竞赛00359]

13. 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\,\mathrm{d}x,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. [数学考研竞赛00372]

14. 设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域, 其面积为 $A>0$, 函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续且 $f(x,y)>0$. 记 @跟锦数学微信公众号

$$J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right)^n,$$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=$ ____ . [数学考研竞赛00402]

15. 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数, 若 @跟锦数学微信公众号

$$I=\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在且有限, 则称广义积分 $\iint\limits_{R^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I . (1)、设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上非负连续函数. 若 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I , 证明极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\leqslant x,y\leqslant t}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在且等于 I . (2)、设 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I , 其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于 0 . [数学考研竞赛00407]

16. 设 $f(x)=\arctan x$, A 为常数. 若 @跟锦数学微信公众号

$$B=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right]$$

存在, 求 A, B . [数学考研竞赛00508]

17. 设 $f(x)=1-x^2+x^3$ $(x\in[0,1])$, 计算以下极限并说明理由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}.$$

[数学考研竞赛00509]

18. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant 1, f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty).$$

证明: 对于 $0<\alpha<\beta$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0.$$

[数学考研竞赛00597]

19. 设 $f(x,y)$ 是在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$M=\max_{x\in D}|f(x,y)|,\quad m=\min_{x\in D}|f(x,y)|.$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\iint\limits_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}$. [数学考研竞赛00657]

20. 若函数列 $\{g_n(x)\}$ 满足下列条件: (1)、 $g_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^1 g_n(x)$ 1 ; (2)、 $\forall\ c\in(0,1), \{g_n(x)\}$ 在 $[-1,-c]$ 与 $[c,1]$ 上一致收敛于 0 . 证明: 对 $[-1,1]$ 上任意连续函数 $f(x)$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x=f(0).$$

[数学考研竞赛00708]

21. 请用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,\mathrm{d}x=0$. [数学考研竞赛00756]

22. 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调, 且 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$. [数学考研竞赛00904]

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(n+1)x^nf(x)\,\mathrm{d}x=f(1).$$

[数学考研竞赛00989]

24. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负递增, 并且积分 $\int_1^{\infty}\frac{f(x)-x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. [数学考研竞赛01082]

25. 设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\left[xf(x)-f(0)\sin x\right]\cos^nx\,\mathrm{d}x=0.$$

[数学考研竞赛01083]

26. 证明: 当 $m<2$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^m}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=0$. [数学考研竞赛01109]

27. 证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty}R^\lambda\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$. [数学考研竞赛01110]

28. 计算以下渐近等式 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)$$

中的待定常数 a,b . [数学考研竞赛01111]

29. 设非负严格增加函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 有积分中值定理, 对于每个 $p>0$ 存在唯一的 $x_p\in(a,b)$, 使 @跟锦数学微信公众号

$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^bf^p(t)\,\mathrm{d}t.$$

试求 $\lim\limits_{p\to\infty}x_p$. [数学考研竞赛01112]

30. 设 $f\in C[0,+\infty)$ ，a 为实数，且存在有限极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

证明；$f(+\infty)=0$ ．[数学考研竞赛01113]

31. 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ 存在．这里 L 是有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$ ．试证：$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=L$ ．[数学考研竞赛01236]

32. 求 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t}{\ln x}$ ．[数学考研竞赛01254]

33. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求极限 $\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\dfrac{f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ ，需要证明．[数学考研竞赛01257]

广义积分

1. 证明：若 $|f|$ 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分存在，则 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分存在．举例说明反之不成立．[数学考研竞赛00077]

2. 试求 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^6)^2}$. [数学考研竞赛00080]

3. 若广义积分 $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$ 收敛，试求实数 p 的取值范围．[数学考研竞赛00106]

4. 设 $\beta>\alpha>0$ ，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x=$ ____ ．[数学考研竞赛00192]

5. 设 $s>0$ ，求 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$ ．[数学考研竞赛00225]

6. 讨论 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性，其中 α 是一个实常数．[数学考研竞赛00276]

7. 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ ，@跟锦数学微信公众号

$$f(0)>0,f'(x)\geqslant 0,\forall\ x\in[0,+\infty).$$

若 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}<+\infty$ ，求证：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}<+\infty$.[数学考研竞赛00283]

8. 计算 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.[数学考研竞赛00293]

9. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的. [数学考研竞赛00322]

10. 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$u(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t,$$

则 $u(x)$ 的初等函数表达式是 ____ . [数学考研竞赛00418]

11. 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$,称 $\varphi \in \mathscr{S}$,如果 $\forall\ m,k \geqslant 0$ 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m \varphi^{(k)}(x)| < +\infty.$$

若 $f \in \mathscr{S}$,可定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}\,\mathrm{d}y \quad (\forall\ x \in \mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f} \in \mathscr{S}$,且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy}\,\mathrm{d}y, \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

[数学考研竞赛00478]

12. 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$,称 $\varphi \in \mathscr{S}$,如果 $\forall\ m,k \geqslant 0$ 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m \varphi^{(k)}(x)| < +\infty.$$

若 $f \in \mathscr{S}$,可定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}\,\mathrm{d}y \quad (\forall\ x \in \mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f} \in \mathscr{S}$,且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy}\,\mathrm{d}y, \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

[数学考研竞赛00487]

13. 设 $\alpha \in (1,2), (1-x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, n\times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵, I 为 n 阶单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$G(x) \equiv (g_{ij}(x)) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI+A)^k, 0 \leqslant x < 1.$$

试证对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ ，积分 $\int_0^1 g_{ij}(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$. [数学考研竞赛00527]

14. 设 $f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ，则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00571]

15. 设 $f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ，则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00580]

16. 设 $a > 0$ ，则 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00592]

17. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + x^{2019})}.$$

[数学考研竞赛00609]

18. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3}$. [数学考研竞赛00629]

19. 求 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}y}{(\ln y)^{2x}}$ 的定义域. [数学考研竞赛00736]

20. 设无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $xf(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 求证: $f(x) \geqslant 0, x \in [1, +\infty)$. [数学考研竞赛00817]

21. 当且仅当 p 满足 $\underline{\qquad}$ 时, 无穷积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x\, [\ln(\ln x)]^p}$$

收敛. [数学考研竞赛00893]

22. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^{2019})}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00922]

23. 设 $q>p$, 且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 p 和 q 的取值范围是 ____ . [数学考研竞赛00938]

24. 设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f(x)>0$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(t)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对每个 $t\neq 0$, 有 $|\hat{f}(t)|<\hat{f}(0)$. [数学考研竞赛00996]

25. 试证: $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. [数学考研竞赛01132]

26. 若函数 $p(t)$ 在 $[0,\infty)$ 连续, 且当 $t\to+\infty$ 时, $p(t)=o(t^N)$ (N 为正整数). 又 $\lambda<0$, 证明: 当 $t\to\infty$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\int_t^{\infty}p(\tau)\mathrm{e}^{\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau=o(t^{N+1})\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

(北京师范大学) [数学考研竞赛01153]

27. 计算广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x\in[n,n+1)$ 时, $(x)=x-n$). [数学考研竞赛01168]

28. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛01205]

数项级数

1. 试求 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$. [数学考研竞赛00088]

2. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的敛散性, 其中 $p>0$. [数学考研竞赛00116]

3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi+\sqrt[n]{n}-1\right)$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛? [数学考研竞赛00168]

4. 设 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 \mathrm{d}t,$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. [数学考研竞赛00178]

5. 设 $a_n>0, S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, 证明: (1)、当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛; (2)、当 $\alpha\leqslant 1$, 且 $S_n\to 0\ (n\to\infty)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散. [数学考研竞赛00230]

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, @跟锦数学微信公众号

$$t_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n+k}+\cdots.$$

证明: $\lim_{n\to\infty} t_n=0$. [数学考研竞赛00235]

7. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数, 且 $|f'(x)|<mf(x)$, 其中 $0<m<1$. 任取实数 a_0 , 定义 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots.$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛. [数学考研竞赛00246]

8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 那么 (1)、若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2)、若 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. [数学考研竞赛00298]

9. 若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_n$ 都是收敛的, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. [数学考研竞赛00314]

10. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$ ，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛. [数学考研竞赛00326]

11. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 弱收敛, 求其和. [数学考研竞赛00330]

12. 设 $p>0, x_1=\frac{1}{4}$ ，且

$$x_{n+1}^p=x_n+x_n^{2p}\ (n=1,2,\cdots),$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛且求和. [数学考研竞赛00405]

13. 令 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是 ____ . [数学考研竞赛00425]

14. 令 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是 ____ . [数学考研竞赛00434]

15. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$ ，其中 n 为正整数. (1)、若 $n\geqslant2$ ，计算 I_n+I_{n-2} ; (2)、设 p 为实数, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nI_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性. [数学考研竞赛00454]

16. $\sum\limits_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 ____ . [数学考研竞赛00497]

17. 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1>1$. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$$

收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1} ? [数学考研竞赛00505]

18. 设 $0<a_n<1, n=1,2,\cdots$ ，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ (有限或 $+\infty$). (1)、证明: 当 $q>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散; (2)、讨论 $q=1$ 时

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性并阐述理由. [数学考研竞赛00552]

19. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0\ (n\geqslant 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n,\ n\geqslant 2.$$

求证: (1)、 $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n$ ($n\geqslant 2$); (2)、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. [数学考研竞赛00557]

20. 已知 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是正项级数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0,\ k=1,2,\cdots,$$

δ 为一正常数. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$

收敛. [数学考研竞赛00568]

21. 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 问单调递减的正实数列, $\lim_{n\to\infty} u_n=0$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nu_n$ 收敛, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$$

[数学考研竞赛00601]

22. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$ 收敛, 其中 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. [数学考研竞赛00614]

23. 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n.$$

证明: $c_n>0$, ($n\geqslant 0$), 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根. [数学考研竞赛00623]

24. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. [数学考研竞赛00703]

25. 设 $\{a_n\}$ 是正的单调增加数列, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 有界. [数学考研竞赛00709]

26. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. [数学考研竞赛00747]

27. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛. [数学考研竞赛00750]

28. 设 $u_n\neq 0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 是条件收敛. [数学考研竞赛00784]

29. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$. (1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛, 并求其和; (2) 若二阶导数 $f''(x)<0, x\in[1,+\infty)$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛. [数学考研竞赛00847]

30. 设方程 $x^n+nx-1=0$, 其中 n 为正整数. 证明: 此方程有唯一正实根 x_n , 且当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛. [数学考研竞赛00928]

31. 求证: (1) 对任一收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 必存在正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 满足: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$; (2) 对任一通项为正的发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 必存在发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 满足: $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$. [数学考研竞赛00975]

32. 设 $\{a_n\}$ 递减趋于零, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}<\infty\Leftrightarrow a_n=O\left(\frac{1}{\ln n}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\ln n<\infty.$$

[数学考研竞赛01002]

33. 对任意的 $a>0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+a}\sqrt{\frac{a}{k}}<\pi.$$

[数学考研竞赛01035]

34. 设 $a_n>0$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散. [数学考研竞赛01129]

35. 设 $\{a_n\}$ 为数列, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 为部分和. (1). 当 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 时, 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}=0$. (2). 设 $\{S_n\}$ 有界, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. (3). 当 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}=0$ 且 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 时, 能否推出 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$? 若能, 给出证明; 若不能, 请构造反例. [数学考研竞赛01187]

36. 设 @跟锦数学微信公众号

$$u_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4)^n}\quad(n\geqslant 1).$$

(1)、证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n\to\infty} u_n$; (2)、证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛; (3)、证明当 $p\geqslant 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 的和. [数学考研竞赛01212]

37. 试求无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{1+n^3}\right)$. [数学考研竞赛01237]

38. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}$, 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. [数学考研竞赛01248]

函数项级数

1. 设连续函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足对 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(y)]=0,$$

其中 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$. 试问: 是否存在 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x\in(0,x_0),f(x)>x;\forall\ x\in(x_0,+\infty),f(x)<x.$$

[数学考研竞赛00158]

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并没在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \leqslant M$. (1)、证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛; (2)、记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导, 为什么? [数学考研竞赛00177]

3. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x \quad (n=1,2,\cdots),$$

且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和. [数学考研竞赛00190]

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$, 当自然数 $n\to\infty$ 时, $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0 . [数学考研竞赛00197]

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$, 当自然数 $n\to\infty$ 时, $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0 . [数学考研竞赛00214]

6. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x=a <$. 构造函数列如下: @跟锦数学微信公众号

$$g_0(x)=h(x),\quad g_n(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots).$$

求证: $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数. [数学考研竞赛00412]

7. 设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots$. 讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上是否一致收敛? 说明理由. [数学考研竞赛00635]

8. 研究函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性, 一致连续性与可微性. [数学考研竞赛00659]

9. 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. [数学考研竞赛00684]

10. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. [数学考研竞赛00816]

11. 设函数 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 令 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,\ \ x\in[0,1],\ \ n=1,2,\cdots.$$

请证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. [数学考研竞赛00832]

12. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛性和一致收敛性. [数学考研竞赛00976]

幂级数

1. 设 $a_n\geqslant 0,\ (n\in\mathbb{Z}_+)$; $\quad A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$. 再设 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0.$$

试证: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r=1$. [数学考研竞赛00087]

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和. [数学考研竞赛00131]

bel 定理 设幂级数 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s$ 收敛. 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=s.$$

[数学考研竞赛00139]

3. 求级数的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-1}{n\cdot 2^n}$. [数学考研竞赛00154]

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和. [数学考研竞赛00258]

5. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i,|x|<1,$$

n 为正整数. 求 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i$.[数学考研竞赛00285]

6. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1 , $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, 且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. [数学考研竞赛00357]

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和 $=$ ____ . [数学考研竞赛00375]

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和 $=$ ____ . [数学考研竞赛00384]

9. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域, 及其和函数. [数学考研竞赛00421]

10. 确定幂级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$$

的收敛域. [数学考研竞赛00638]

11. 求幂级数 $-x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数. [数学考研竞赛00679]

12. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. [数学考研竞赛00734]

13. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域以及在收敛域内求这个级数的和. [数学考研竞赛00755]

14. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是 ____ . [数学考研竞赛00774]

15. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数. [数学考研竞赛00782]

16. 确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ 的收敛域, 并求其和函数. [数学考研竞赛00819]

17. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$ 的和函数, 并指其和函数的定义域. [数学考研竞赛00835]

18. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ 的收敛半径和收敛区间, 并判断其收敛区间端点处的敛散性. [数学考研竞赛00876]

19. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛域为 ____ . [数学考研竞赛00892]

20. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 上的和函数. [数学考研竞赛00899]

21. 求 $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$. [数学考研竞赛00900]

22. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间是 ____ . [数学考研竞赛00937]

23. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$ 的值. [数学考研竞赛00965]

24. 试证: (1) $\inf_{n\geqslant 1}|\sin n|=0$; (2) $\{\sin n\}$ 发散; (3) 试求 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin n)x^{n-1}$ 的收敛域及和函数. [数学考研竞赛00990]

Fourier级数

1. 记 @跟锦数学微信公众号

$$y_n(x)=\cos(n\arccos x), n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 证明当 $n\neq m$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=0.$$

(2) 求 $c_n, n=0,1,2,\cdots$ 使 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{e}^{\arccos x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n y_n(x).$$

[数学考研竞赛00146]

2. (1)、将 $[-\pi,\pi)$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开成傅里叶级数, 并证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2)、求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u$ 的值. [数学考研竞赛00406]

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值是 ____ . [数学考研竞赛00417]

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right).$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数. [数学考研竞赛00471]

5. 求 $f(x)=x$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开式 ____ . [数学考研竞赛00896]

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上可积, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)(\pi-x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

[数学考研竞赛01201]

7. 利用 Parseval 等式证明: 如果 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 f 和三角函数系 @跟锦数学微信公众号

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

中每个函数正交, 那么必有 $f(x)=0$. [数学考研竞赛01224]

多元函数极限与连续

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$. (1) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y),\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$. [数学考研竞赛00631]

2. (2) 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在? [数学考研竞赛00632]

3. 证明: 不存在从闭区间 $[0,1]$ 到单位圆周上的一对一的连续对应. [数学考研竞赛00663]

4. 已知一元函数 $f(h)$ 在 h_0 点可导, 设 @跟锦数学微信公众号

$$g(x,y)=\frac{f(h_0+x)-f(h_0-y)}{x+y}$$

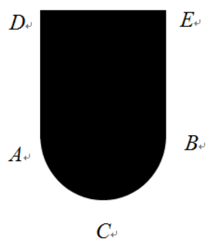
为定义在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, 其中 D 为 $\mathbb{R}^2$ 的第一象限. 用 $\varepsilon-\delta$ 定义求 g 在 D 上当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限. [数学考研竞赛00680]

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$. [数学考研竞赛00700]

6. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. (1)、计算累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y$. (2)、讨论重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在? [数学考研竞赛00813]

多元函数微分学

1. 如图, 将一根钢丝折成两部分, 一部分围成一个矩形 $ABED$ 的三条边 AD、DE、EB, 另一部分围成一个半圆 ACB, 矩形和半圆的面积之为 1, 求钢丝长度的最小值.



[数学考研竞赛00113]

2. 设由方程 $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ $(*)$ 确定函数 $z=z(x,y)$. (1) 计算 $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (2) 如果以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为法向量的平面与 $(*)$ 交为圆, 求此法向量. [数学考研竞赛00117]

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数, 求 $z''_{xy}(0,0)$. [数学考研竞赛00121]

4. 分析函数 $f(x,y)=(x^2+y^2-6y+10)\mathrm{e}^y$ 的极值问题. [数学考研竞赛00125]

5. 求函数

$$f(x,y,z)=\frac{z}{1+xy}+\frac{y}{1+xz}+\frac{x}{1+yz}$$

在

$$V=\{(x,y,z);0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$$

的最大值. [数学考研竞赛00144]

6. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2},$$

其中 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 求 α,β 的值. [数学考研竞赛00145]

7. 设曲线 $y=y(x)$ 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x-4y & =3t^2+2t, \\ \mathrm{e}^{y-1}+ty & =\cos t \end{cases}$$

确定, 则该曲线在 $t=0$ 处的切线的方程是 ____ . [数学考研竞赛00162]

8. 设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 满足等式 @跟锦数学微信公众号

$$6z''_{xx}-z''_{xy}-z''_{yy}=0.$$

已知变换 $u=x-3y,u=x+ay$ 把上述等式简化为 $z''_{uv}=0$. (1)、求常数 a 的值; (2)、写出 $z=f(x,y)$ 的表达式. [数学考研竞赛00170]

9. 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ____ . [数学考研竞赛00183]

10. 设 $D=\left\{(x,y);x^2+y^2<1\right\}$, $f(x,y)$ 在 D 内连续, $g(x,y)$ 在 D 内连续有界, 且满足条件: (1)、当 $x^2+y^2\to1$ 时, $f(x,y)\to+\infty$; (2)、在 D 中 f 与 g 有二阶偏导数, @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}=\mathrm{e}^f,\quad g''_{xx}+g''_{yy}\geqslant\mathrm{e}^g.$$

证明: $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ 在 D 内处处成立. [数学考研竞赛00198]

11. 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $g''_{xx}+g''_{yy}$. [数学考研竞赛00226]

12. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中 $a>b>c>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2,$$

Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值. [数学考研竞赛00244]

13. 对于 $\triangle ABC$, 求 @跟锦数学微信公众号

$$3\sin A+4\sin B+18\sin C$$

的最大值. [数学考研竞赛00251]

14. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$. 求证: $x^2z_x'+y^2z_y'=0$ 和 @跟锦数学微信公众号

$$x^3z_{xx}''+xy(x+y)z_{xy}''+y^3z_{yy}''=0.$$

[数学考研竞赛00262]

15. 设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_x'^2f_{yy}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+f_y'^2f_{xx}''=0,$$

且 $f_y'\neq 0$, $y=y(x,z)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的函数. 求 y_{xx}'' . [数学考研竞赛00273]

16. 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$, 且 $u_{xy}''=0$, 确定常数 a 和 b , 使得函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $z_{xy}''-z_x'-z_y'+z=0$; [数学考研竞赛00290]

17. 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv,$$

求 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解. [数学考研竞赛00306]

18. 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求此切平面的方程. [数学考研竞赛00309]

19. 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定.求 $y(x)$ 的极值. [数学考研竞赛00323]

20. 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$, 曲线 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为 S . 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程. [数学考研竞赛00350]

21. 设有曲面 $S:z=x^2+2y^2$ 和平面 $L:2x+2y+z=0$, 则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 $\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00365]

22. 设 $l_j,j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n\geqslant 2$ 个方向向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$. 若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导数, 证明 $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_j}=0$. [数学考研竞赛00403]

23. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$$

所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 且 $xF_u+yF_v\neq 0$. 则 @跟锦数学微信公众号

$$xz_x'+yz_y'=\underline{\qquad}.$$

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数) [数学考研竞赛00415]

24. 设 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数, 证明: 曲面 @跟锦数学微信公众号

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$$

的所有切平面都交于点 (a,b,c) . [数学考研竞赛00451]

25. 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(\mathrm{e}^xy^2)$, 若 $z_x'=z$, 求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式. [数学考研竞赛00464]

26. 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行与平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为 $\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00466]

27. 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_x'=-f,f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1,\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\cot y},$$

则 $f(x,y)=$ ____ . [数学考研竞赛00495]

28. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$u=x-cy, v=x+cy,$$

其中 c 为非零常数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00512]

29. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α , 定义一元函数 @跟锦数学微信公众号

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha, t\sin\alpha),$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$, 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值. [数学考研竞赛00516]

30. 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ \mathrm{e}^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ____ . [数学考研竞赛00560]

31. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M,$$

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度. [数学考研竞赛00566]

32. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 则 $z''_{xy}=$ ____ . [数学考研竞赛00594]

33. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x2-2xy+3y^2},$$

则 $u(x,y)=$ ____ . [数学考研竞赛00618]

34. 设 $a,b,c,\mu>0$, 曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

相切, 则 $\mu=$ ____ . [数学考研竞赛00619]

35. 求由方程 $xyz^3+x^2+y^3-z=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. [数学考研竞赛00630]

36. 确定实数 a,b 的值使积分 @跟锦数学微信公众号

$$F(a,b)=\int_0^1\left(ax+b-\frac{1}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

达到最小值. [数学考研竞赛00637]

37. 选取 a,b , 使表达式 @跟锦数学微信公众号

$$[(x+y+1)\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}x+[b\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y$$

为某一函数的全微分, 并求出这个函数. [数学考研竞赛00639]

38. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z\mathrm{e}^z=2\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}$ 在 $(1,-1,0)$ 处的切线方程. [数学考研竞赛00662]

39. 已知函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^my}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ a, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

其中 m 为正整数, a 为实数. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的方向导数的个数为 n , 试讨论 n 与 m 和 a 的关系. [数学考研竞赛00683]

40. 非极值点的稳定点称为鞍点. 证明: 二元函数 $f(x,y)=x+y\sin x$ 的全体鞍点组成的集合与整数集 $\mathbb{Z}$ 可建立一一映射. [数学考研竞赛00688]

41. 设函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

回答下列问题: (1)、函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续? 为什么? (2)、函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 为什么? [数学考研竞赛00707]

42. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上过点 $(0,b)$ 的最大弦长. [数学考研竞赛00732]

43. 求曲面 $xyz=1$ 在其上点 (x_0,y_0,z_0) 处切平面与坐标平面所围几何体体积. [数学考研竞赛00735]

44. 曲面 $\sin(x+z)-y(z+2)+\mathrm{e}^{xy}=1$ 在点 $(-1,0,1)$ 处的切平面方程是 ____ . [数学考研竞赛00771]

45. 设 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u=x+cy,v=x-cy$, 其中 c 为非零常数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00775]

46. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定的隐函数, 求 $\mathrm{d}z$. [数学考研竞赛00812]

47. 确定实数 a,b 的值使积分 $F(a,b)=\displaystyle\int_0^1(ax+b-x^2)^2\,\mathrm{d}x$ 达到最小值. [数学考研竞赛00818]

48. 设 $F(x)=\displaystyle\int_1^{u(x)}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 其中 $u(x)=\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,\mathrm{d}t$, 求一阶导数 $F'(x)$. [数学考研竞赛00826]

49. 设 $z=2x^3+y^2$, 其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2-2=0$ 所确定的隐函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$. [数学考研竞赛00827]

50. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点连续且偏导数存在, 但在此点不可微. [数学考研竞赛00833]

51. 设函数 $u=f(x+g(y))$, 其中 f,g 均二阶可导, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. [数学考研竞赛00841]

52. 计算函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $36x^2+16y^2+9z^2=144$ 下的最大值和最小值. [数学考研竞赛00844]

53. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0,\delta)$ 内的偏导数 f_x,f_y 均有界, 证明函数 $f(x,y)$ 在 $U(P_0,\delta)$ 上连续. [数学考研竞赛00846]

54. 分析二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的连续性与该点存在一阶偏导数的关系 (可举例说明). [数学考研竞赛00873]

55. 若二元函数 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数在点 (x_0,y_0) 某邻域存在且偏导数有界, 证明: $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. [数学考研竞赛00874]

56. 若函数 $u(x,y)$ 具有二阶偏导数, 证明: $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\quad(u\neq 0).$$

[数学考研竞赛00878]

57. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面为 ____ . [数学考研竞赛00895]

58. 已知函数 $f(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$ 二阶可导且满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}\ (\text{柯西-黎曼方程}).$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

[数学考研竞赛00905]

59. 求由方程 $x^2+y^2+z^4-2x-2y-5z-4=0$ 所确定的 $z=z(x,y)$ 的整数极值点并判断极值点类型. [数学考研竞赛00906]

60. 设函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3\cos\frac{y}{x}}{x^2+y^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明: 在点 $(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 连续, 且任意方向的方向导数都存在, 但不可微. [数学考研竞赛00930]

61. 设 $x=u+v, y=u^2+v^2\ (u-v\neq 0)$, 定义 u,v 为 x,y 的函数, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ ____ . [数学考研竞赛00941]

62. 光滑曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ (a 和 b 为非零常数) 上任一点的切平面平行于直线 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z,$$

其中 $aF_1'+bF_2'\neq 0$. [数学考研竞赛00943]

63. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数都存在且只有 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 点不一定可微. [数学考研竞赛00945]

64. 设 D 为平面上的有界域, $f(x,y)$ 在 D 上可微, 在 $\bar{D}$ 上连续, 在 $\bar{D}$ 的边界上 $f(x,y)=0$, 且在 D 上满足: $f_x+f_y=f$. 证明: 在 $\bar{D}$ 上 $f(x,y)=0$. [数学考研竞赛00971]

65. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 定义 $F(x)=\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$, $a\leqslant x\leqslant b$. (1) 证明: F 在 $[a,b]$ 上可导; (2) 计算 $F'(x)$. [数学考研竞赛01106]

66. 设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, f 在 D 上连续且有偏导数. 如果在 D 上有 @跟锦数学微信公众号

$$f_x+f_y+f_z=f,\quad f|_{\partial D}=0\ (\partial D \text{ 记 } D \text{ 的边界}).$$

则 f 在 D 上恒等于 0 . [数学考研竞赛01179]

67. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\vec{F}=\left(a-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{bx}{y^2},-\frac{cxy}{z^2}\right),$$

其中 a,b,c 是三个常数. (i) 问 a,b,c 取何值时, $\vec{F}$ 为有势场. (ii) 当 $\vec{F}$ 为有势场时, 求出它的势函数. [数学考研竞赛01180]

68. 设 $y=f(x)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

确定的隐函数, 且满足 $f(1)=1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ____ . [数学考研竞赛01204]

69. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

其中 f,φ 均为二次可微函数. (1)、求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; (2)、当 $f=\varphi$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$$

时, 求 $f(y)$. [数学考研竞赛01209]

70. 设二元函数 $z(x,y)$ 在上半平面 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);y>0\}$$

内具有具有连续偏导数, 且满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad (170803:eq)$$

(1) 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+b\sqrt{y}\end{cases}$, $(a\neq b)$ 将上述方程 (6) 变换为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求 a,b 的值; (2) 利用 (1) 的结果求方程 (6) 的通解. [数学考研竞赛01225]

重积分

1. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant\iint\limits_{\Omega}\sin(x^2)+\cos(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2},$$

其中 $\Omega=\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$. [数学考研竞赛00104]

2. 求积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{D}(5y^3+x^2+y^2-2x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D:1\leqslant(x-1)^2+y^2\leqslant 4$ 且 $x^2+y^2\leqslant 1$. [数学考研竞赛00115]

3. 计算 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式 @跟锦数学微信公众号

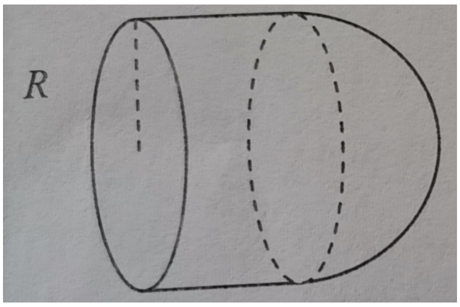
$$\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$$

所确定的区域. [数学考研竞赛00122]

4. 求曲线 $C:\ y=x^2$ 与直线 $L:\ y=x$ 所围图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积. [数学考研竞赛00129]

5. 计算 $\iint\limits_{D}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\left\{(x,y);\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$. [数学考研竞赛00130]

6. (满分 20 分) 如图, 设一个均匀物体是由体积相同的一个半球和一个圆柱拼接而成, 圆柱的地面与半球的大圆面重合, 底面半径为 R , 求此物体的重心.



[数学考研竞赛00148]

7. 设 $a>0$ 是常数, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a\int_0^z\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^a(a-x)^2f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00156]

8. 设曲线 $y=2\sqrt{x}$ 与直线 $y=kx$ 围成的平面图形为 D , 若 D 的面积为 $\frac{1}{3}$, 则 D 绕 y 轴旋转一周而成立体的体积 $V_y=$ ____ . [数学考研竞赛00166]

9. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\frac{\mathrm{e}^{y^2}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛00171]

10. $f(x,y)$ 是 $\left\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 上二次连续可微函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}=x^2y^2,$$

计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'_x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛00179]

11. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_D\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_,$$

其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域. [数学考研竞赛00181]

12. 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y\geqslant 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. [数学考研竞赛00189]

13. 设 @跟锦数学微信公众号

$$R=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$R_\varepsilon=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,0\leqslant y\leqslant 1-\varepsilon\}.$$

考虑积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_R\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy},\quad I_\varepsilon=\iint\limits_{R_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy},$$

定义 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}I_\varepsilon$. (1)、证明: $I=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$; (2)、利用变量替换 $\begin{cases}u=\frac{1}{2}(x+y)\\ v=\frac{1}{2}(y-x)\end{cases}$ 计算积分 I 的值, 并由此推出 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}.$$

[数学考研竞赛00199]

14. 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元, 而侧面的材料费为单位面积 b 元. 试给出最节省的设计方案: 即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少? [数学考研竞赛00205]

15. 设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线, 均匀椭圆 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

(其中 $0<c<b<a$, 密度为 1) 绕 l 旋转. (1)、求其转动惯量; (2)、求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值. [数学考研竞赛00231]

16. 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases}x^2+3y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分 $(z\geqslant 0)$ (取上侧), Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦. 计算: (1)、 $\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$; (2)、 $\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S$. [数学考研竞赛00245]

17. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$. [数学考研竞赛00257]

18. 设函数 $f(x)$ 连续, a,b,c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 记第一型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证: $I=2\pi\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\,\mathrm{d}u$. [数学考研竞赛00263]

19. 求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ ($a>0$) 所围立体的表面积. [数学考研竞赛00275]

20. 设 D 为椭圆形 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\ \ (a>b>0),$$

面密度为 ρ 的均质薄板; l 为通过椭圆焦点 $(-c,0)$ (其中 $c^2=a^2-b^2$) 垂直于薄板的旋转轴. (1)、求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J ; (2)、对于固定的转动惯量, 讨论椭圆薄板面积的是否有最大值和最小值. [数学考研竞赛00278]

21. 设 $f(x)$ 为连续函数, $t>0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的上半部分. 定义三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$F(t)=\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.[数学考研竞赛00297]

22. 求二重积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}|x^2+y^2-x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛00313]

23. 计算积分 $\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00348]

24. 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 ____ . [数学考研竞赛00416]

25. 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f_{xx}''^2+2f_{xy}''^2+f_{yy}''^2\leqslant M.$$

若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

[数学考研竞赛00423]

26. 设 $D: x^2+2y^2\leqslant 2x+4y$, 则积分 $I=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ . [数学考研竞赛00426]

27. 设 $D: x^2+2y^2\leqslant 2x+4y$, 则积分 $I=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ . [数学考研竞赛00435]

28. 设 $D: 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_D (x+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-4)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

的值是 ____ . [数学考研竞赛00447]

29. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

[数学考研竞赛00452]

30. 某物体所在的空间区域为 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z,$$

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量 @跟锦数学微信公众号

$$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[数学考研竞赛00468]

31. 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$$

上具有连续的二阶偏导数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(xf'_x+yf'_y+zf'_z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. [数学考研竞赛00501]

32. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V , 则三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{V}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00515]

33. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);x^2+y^2\leqslant a^2\}$$

上具有一阶连续偏导数, 且满足 $f(x,y)|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$, 以及 @跟锦数学微信公众号

$$\max_{(x,y)\in D}\left[f_x'^2+f_y'^2\right]=a^2,$$

其中 $a>0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint\limits_{D}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4.$$

[数学考研竞赛00551]

34. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是由 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4,x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9,z\geqslant 0$$

所围成的空心立体. [数学考研竞赛00565]

35. 计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 $\Omega:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$. [数学考研竞赛00598]

36. 计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限的部分. [数学考研竞赛00620]

37. 计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

[数学考研竞赛00622]

38. 计算 $\iint_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的区域. [数学考研竞赛00655]

39. 用三重积分求椭球体 @跟锦数学微信公众号

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,a,b,c>0\right\}$$

的体积. [数学考研竞赛00678]

40. 计算封闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ ($a>0$) 所围立体的体积. [数学考研竞赛00710]

41. 积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^1\frac{y\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=$ ____ . [数学考研竞赛00773]

42. 计算 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 及 $z=9$ 所围成的闭区域; [数学考研竞赛00779]

43. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$. [数学考研竞赛00901]

44. 二重积分 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x}\mathrm{e}^{x^2+y^2-2x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ . [数学考研竞赛00940]

45. 求由 $z=x+y$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成的几何体体积. [数学考研竞赛00969]

46. 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x \, \mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00970]

47. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中简单光滑闭曲面 Σ 所围的有界连通区域. 考查问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ u|_{\Sigma} = f(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}, \qquad (161217 : eq)$$

其中 $f(x,y,z)$ 为已知连续函数, $u(x,y,z)$ 为具有二阶连续偏导的未知函数. 证明若问题 (5) 有界, 则其解是唯一的, 即若 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 皆满足 (5), 则有 $u(x,y,z) = v(x,y,z)$. [数学考研竞赛00993]

48. 试求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \mathrm{e}^x \cos y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛01078]

49. 在 $\mathbb{R}^4$ 中定义如下有界区域 Ω : @跟锦数学微信公众号

$$\Omega = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ |x| + |y| + \sqrt{z^2 + w^2} \leqslant 1 \right\}.$$

计算 Ω 的体积. [数学考研竞赛01186]

50. 计算二重积分: $I = \displaystyle\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中积分区域由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域. [数学考研竞赛01256]

曲线曲面积分

1. 求 $\displaystyle\int_{\Gamma} y^2 \, \mathrm{d}s$, 其中 Γ 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x+z &= a \end{cases}$ 决定. [数学考研竞赛00056]

2. 已知质线 L : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$ 的线密度 $\rho = |x^2 + x - y^2 - y|$, 求 L 的质量. [数学考研竞赛00126]

3. 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{(x-1)\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2 + y^2},$$

其中 L 是从 $(-2,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. [数学考研竞赛00134]

4. 设曲面 S 为: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}+z^2=1, z\geqslant 0.$$

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},$$

S 方向朝上. [数学考研竞赛00147]

5. 设椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的线密度为 $\rho(x,y)=|xy|$, 求椭圆的质量. [数学考研竞赛00153]

6. 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-y^2)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中 L 是 $y=-\cos\pi x$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段曲线. [数学考研竞赛00172]

7. 求曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_\Sigma (x-1)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+1)^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}$ 的上侧. [数学考研竞赛00173]

8. 已知平面区域 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\},$$

L 为 D 的正向边界, 试证: (1)、 $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$; (2)、 $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$. [数学考研竞赛00187]

9. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_\Sigma \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, $a>0$. [数学考研竞赛00204]

10. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(y)}{x^4+y^2}$$

的值为常数. (1)、设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0;$$

(2)、求函数 $\varphi(x)$; (3)、设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

[数学考研竞赛00232]

11. 设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F(xz-y,x-yz)=0$$

(其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数) 唯一确定, L 为正向单位圆周. 试求: @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_L (xz^2+2yz)\,\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\,\mathrm{d}x.$$

(1)、求解微分方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$ (2)、如 $y=f(x)$ 为上述方程的解, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

[数学考研竞赛00279]

12. 设函数 $u=u(x)$ 连续可微, $u(2)=1$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关, 求 $u(x)$; [数学考研竞赛00291]

13. 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2y^3-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(3z^3-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ , 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值. [数学考研竞赛00328]

14. 设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向. 求极限 $\lim_{r\to+\infty}I_a(r)$. [数学考研竞赛00329]

15. 设函数 $f(x)$ 连续可导, @跟锦数学微信公众号

$$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right),$$

邮箱曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I_t=\iint_{\Sigma_t}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求极限 $\lim_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4}$. [数学考研竞赛00355]

16. (1)、设一球缺高为 h , 所在球半径为 R . 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$. (2)、设球体 @跟锦数学微信公众号

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$$

被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω . 记球缺上的球冠为 Σ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛00371]

17. 计算第一型曲面积分的值: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}S=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00376]

18. 计算第一型曲面积分的值: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}S=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00385]

19. 设曲线积分 $I=\oint\limits_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$ ，其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时针, 则 $I=\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00401]

20. 设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数, 设上半球面 @跟锦数学微信公众号

$$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

方向朝上. 若对任何点 (x_0,y_0,z_0) 和 $r>0$ ，第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

证明: $P_x'\equiv 0$. [数学考研竞赛00455]

21. 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

($a>0$ 为常数), 其中 $S:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，取上侧. $I=\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00474]

22. 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

($a>0$ 为常数), 其中 $S:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，取上侧. $I=\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00483]

23. 设 Γ 为曲线 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z.$$

[数学考研竞赛00517]

24. 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x=\pi\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t, \\ z=\sin 2t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. 则第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00522]

25. 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x=\pi\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t, \\ z=\sin 2t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. 则第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00531]

26. 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f(x^2-y^2)$, 使得曲线 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L [y(2-f(x^2-y^2))]\,\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线. [数学考研竞赛00563]

27. 设曲线 L 是空间区域 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$$

的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right|=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00593]

28. 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

其中 S 是由曲面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1, y=2$ 所围立体表面的外侧. [数学考研竞赛00640]

29. 计算 $\oiint\limits_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+zx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是单位圆周 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧. [数学考研竞赛00656]

30. 证明: 第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

在区域 $D: x>0$ 上与路径无关. [数学考研竞赛00685]

31. 求 $\oint\limits_{x^2+y^2=1} xy^2\,\mathrm{d}y-yx^2\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00737]

32. 计算曲线积分 $\oint\limits_L \dfrac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 $L: x^2+y^2=1$ 取逆时针方向; [数学考研竞赛00781]

33. 设连续函数 $f(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$. 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant 2\pi,$$

其中 $L: x^2+y^2=1$ 并取逆时针方向. [数学考研竞赛00820]

34. 计算曲面积分 $\iint\limits_S (xy+yz+xz)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分. [数学考研竞赛00821]

35. 设 $P(x,y)$ 在 xy 平面上有连续偏导数, 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关, 且对任意的 t 恒有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y,$$

请求解二元函数 $P(x,y)$. [数学考研竞赛00831]

36. 计算曲面积分 $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的外侧. [数学考研竞赛00834]

37. 设 D 为两直线 $y=x, y=4x$ 和两双曲线 $xy=1, xy=4$ 所围区域, $F(u)$ 具有连续导数, 令 $f(u)=F'(u)$, 求证 $\oint_L 2\,\mathrm{d}x+\frac{F(xy)}{y}\,\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u$, 其中 L 为 D 的边界, 逆时针方向. [数学考研竞赛00848]

38. 计算积分 $\iint_S (x^4-z^4+y^2z^2-x^2y^2+1)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $x^2+z^2=y^2\ (y\geqslant 0)$ 被圆柱面 $x^2+z^2=2x$ 截取的部分. [数学考研竞赛00849]

39. 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_\Sigma 2(1-x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+8xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-4xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲线 $x=\mathrm{e}^y\ (0\leqslant y\leqslant a, a>0)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面外侧. [数学考研竞赛00877]

40. 曲线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, t\in(0,2\pi)$ 的弧长为 ____ . [数学考研竞赛00894]

41. 若 L 为不经过原点的简单闭曲线, 方向为逆时针, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00898]

42. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为 $z=x^2+y^2, z\in[0,1]$ 的外侧. [数学考研竞赛00902]

43. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|},$$

其中平面曲线 L 是抛物线 $y=x^2-4$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$ 的一段. [数学考研竞赛00924]

44. 计算第二类曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲面 $\Sigma:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 方向取外侧. [数学考研竞赛00932]

45. 第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L (x\mathrm{e}^{x^2}+y)\,\mathrm{d}x+\sin y^2\,\mathrm{d}y=\underline{\qquad},$$

其中 L 为曲线 $y=\sqrt{x-x^2}$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,0)$ 的一段. [数学考研竞赛00942]

46. 计算第二类曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 为单位球面外侧. [数学考研竞赛00948]

47. 设立体 Σ 由 $x^2+y^2=2z$ 与 $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成, 求 Σ 的体积与表面积. [数学考研竞赛01177]

48. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L x^2yz\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y+(x+y+1)\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 和 $z=x^2+y^2+1$ 的交线, 从 z 轴正向看 L 是逆时针方向. [数学考研竞赛01189]

49. 已知球缺高为 h , 所在球半径为 R 的球缺体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$. 现有一球体: @跟锦数学微信公众号

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$$

被平面 $x+y+z=1$ 所截下的小球缺为 Ω , 记球缺上的球冠为 Σ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[数学考研竞赛01196]

50. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_\Gamma |\sqrt{3}y-x|\,\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z,$$

曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向. [数学考研竞赛01210]

51. 求 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{Rx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半球面的上侧, R 为一常数. [数学考研竞赛01261]

含参量积分

1. 试证: $\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,\infty)$ 内不一致收敛. [数学考研竞赛00137]

2. 用含参量积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛00681]

3. 设 $f(x)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t$. 证明: (1)、 $f(x)$ 满足微分方程 $f'(x)+2xf(x)=0$; (2)、 $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. [数学考研竞赛00706]

4. 证明: (1)、 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[0,1]$ 一致收敛. (2)、求 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ co . [数学考研竞赛00879]

5. 设 $\theta\in(0,1)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\pi} \ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

[数学考研竞赛00908]

6. 记区间 $I=(0,+\infty)$, 证明: 含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2y}\sin y\,\mathrm{d}y$ 在 I 内不一致收敛, 但在 I 内的任何一个闭区间上一致收敛. [数学考研竞赛00931]

7. 设 $\beta>\alpha>0$, 求积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00949]

8. 试证: $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛. [数学考研竞赛00983]

第二章　　高等代数

Contents

多项式

1. 设 m,n 是正整数. 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x-1$ 当且仅当 $(m,n)=1$. [数学考研竞赛00101]

2. 设正整数 m 与 n 为一奇一偶, 请简略地说明此时有: $(x^m+1,x^n+1)=1$. [数学考研竞赛00102]

3. 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 $I-\bar{A}A$ 的特征多项式, 其中 $\bar{A}$ 表示 A 的共轭方阵. 证明: $p(x)$ 必为实系数多项式. [数学考研竞赛00604]

4. 求 a,b , 使得多项式 $x^4-4ax+b$ 有重因式. [数学考研竞赛00641]

5. 设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, $a\in\mathbb{P}$, $(x-a)\mid f(x^n)$. 证明: $(x^n-a^n)\mid f(x^n)$. [数学考研竞赛00664]

6. 证明: 如果 $x^2+x+1\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 则 $(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$. [数学考研竞赛00689]

7. 若多项式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 3 , 除以 $x-3$ 的余式为 4 , 则 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的余式为 ____ . [数学考研竞赛00711]

8. 设

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-(2n-1))+1,$$

其中 n 为大于 1 的非负整数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约. [数学考研竞赛00719]

9. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式. 证明: $f(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 互素的充分必要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$(f(x), h(x)) = (f(x), g(x)) = 1.$$

[数学考研竞赛00738]

10. 设 m 是整数. 证明: $x^4 - mx^2 + 1$ 在有理数域上可约的充分必要条件是存在正数 k 使得 $m = k^2 - 2$ 或 $m = k^2 + 2$. [数学考研竞赛00739]

11. 试就实数域和复数域两种情况, 求 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$$

的标准分解式. [数学考研竞赛00760]

12. 多项式 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 和 $g(x) = x^4 + x^2 + 1$ 的最大公因式是 ____ . [数学考研竞赛00785]

13. 设 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3px + 8$. 试确定 p 的值, 使得 $f(x)$ 有重根, 并求其根.[数学考研竞赛00850]

14. 设 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. 用辗转相除法求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.[数学考研竞赛00859]

15. 设 $f(x), g(x)$ 是多项式, m 为任意正整数. 证明: $g^m(x) \mid f^m(x)$ 当且仅当 $g(x) \mid f(x)$. [数学考研竞赛00882]

16. 已知 $f(x), g(x)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式, m 为大于 1 的正整数. 证明: $g^m(x) \mid f^m(x)$ 当且仅当 $g(x) \mid f(x)$. [数学考研竞赛00909]

17. 已知 $f(x), g(x)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的两个一元多项式. 证明: 存在 $\mathbb{K}$ 上非零二元多项式 $p(x, y)$, 使得 $p(f(x), g(x)) = 0$. [数学考研竞赛00917]

18. 多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = (x^{10} - x^9 + x^9 - \cdots - x + 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$$

的所有偶次项系数之和是 ____ . [数学考研竞赛00950]

19. 在实数域上将多项式 $f(x)=x^5+32$ 分解为不可约多项式的乘积. [数学考研竞赛00955]

20. 设多项式 $f(x)$ 满足 $f(x)\mid f(x^2)$, $f(0)=1$. 证明: 若 $x=\alpha$ 是 $f(x)$ 的根, 则 $\alpha=\pm1$. [数学考研竞赛00959]

21. 设 $f(x),g(x)$ 分别是 m 次和 n 次多项式, 其中 $m>0,n>0$. 证明: (1) 存在次数低于 n 的多项式 $u(x)$ 与次数低于 m 的多项式 $v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=res(f(x),g(x))$; (2) $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $res(f(x),g(x))\neq0$. 这里, 对任意的多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

@跟锦数学微信公众号

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

我们定义 $f(x),g(x)$ 的结式 $res(f(x),g(x))$ 为由两多项式系数形成的 Sylvester 矩阵 A 的行列式, 其中 (f 的系数有 m 行, g 的系数有 n 行) @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

[数学考研竞赛01013]

22. 设 $\mathbb{F}$ 为数域, 如果 $p_1(x),\cdots,p_r(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 r 个两两不同的首相系数为 1 的不可约多项式, 证明: $f(x)=p_1(x)\cdots p_r(x)$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上无重根. [数学考研竞赛01145]

23. 称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k , 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x),$$

且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等. [数学考研竞赛01161]

行列式

1. 设 A,B,C,D 均是 n 阶方阵, $AC=CA$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

[数学考研竞赛00049]

2. 求行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n(b,a)=\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}_n,$$

其中 $n\geqslant 2$. [数学考研竞赛00073]

3. 设实 n 阶方阵 A 的每个元素的绝对值为 2 . 证明: 当 $n\geqslant 3$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$|A|\leqslant \frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}n!.$$

[数学考研竞赛00301]

4. 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $G(t)$ 分别是 @跟锦数学微信公众号

$$B(t)=(b_{ij}(t)),\quad b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

其中 $b_{ij}(t)$ 和 $b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)=\det B(t)$, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 代替 $B(t)$ 行列式中的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组. 试证明: $d(t),d_1(t),d_2(t),\cdots,d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式. [数学考研竞赛00316]

5. 设 V 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法和纯量乘法均为通常的. $f_1,\cdots,f_n\in V$. 证明以下两条等价: (1)、 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关; (2)、 $\exists\ a_1,\cdots,a_n\in[0,1]$ 使得 $\det[f_i(a_j)]\neq 0$, 这里 det 表行列式. [数学考研竞赛00360]

6. 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1 . 则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}|A|=$ ____ . [数学考研竞赛00424]

7. 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1 . 则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}|A|=$ ____ . [数学考研竞赛00433]

8. 设 $A_1,\cdots,A_{2017}$ 为 2016 阶方阵. 证明关于 $x_1,\cdots,x_{2017}$ 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$\det\left(x_1A_1+\cdots+x_{2017}A_{2017}\right)=0$$

至少有一组非零实数集, 其中 det 表示行列式. [数学考研竞赛00458]

9. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1\\\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00472]

10. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1\\\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=\_\_\_\_.$$

[数学考研竞赛00481]

11. 设 a,b,c,d 是互不相同的正实数, x,y,z,w 是实数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$a^x=bcd,b^y=cda,c^z=dab,d^w=abc,$$

则行列式 $\begin{vmatrix}-x&1&1&1\\1&-y&1&1\\1&1&-z&1\\1&1&1&-w\end{vmatrix}=$ ____ . [数学考研竞赛00546]

12. 计算 n 级行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n+1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛00642]

13. 计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+a_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2+a_2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2+a_n \end{vmatrix},\ (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n).$$

[数学考研竞赛00665]

14. 计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛00690]

15. 设四阶行列式 D_4 的第三行元素为 $-1,0,2,3$ ，第四行元素对应的余子式分别为 $5,10,a,5$ ，则 $a=$ ____ . [数学考研竞赛00712]

16. 设 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 都为四维行向量，四阶矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ \gamma_3 \\ 3\gamma_4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ 2\gamma_4 \end{pmatrix},$$

且行列式 $|A|=2,|B|=1$ ，则行列式 $|2A-B|=$ ____ . [数学考研竞赛00713]

17. 设 a,b 是两个不同的实数, 计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ab & a+b \end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛00740]

18. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$ 的值为 ____ . [数学考研竞赛00786]

19. 若行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12}=-1$ ，则 $A_{13}=$ ____ . A. -11 B. 0 C. 2 D. 3 [数学考研竞赛00793]

20. 计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛00800]

21. 计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&x_3^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$. [数学考研竞赛00851]

22. 计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&0&0&\cdots&0&0\\1&a+b&ab&0&\cdots&0&0\\0&1&a+b&ab&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&a+b&ab\\0&0&0&0&\cdots&1&a+b\end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛00860]

23. 计算下列行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix}a^2+ab&a^2b&\cdots&0&0&\\1&a+b&ab&\cdots&0&0\\0&1&a+b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&a+b&ab&\\0&0&0&\cdots&1&a+b\end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛00880]

24. 已知 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵,且 @跟锦数学微信公众号

$$a_{ij}=\begin{cases}n,&i=j,\\-1,&i\neq j\end{cases}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n).$$

求 $|A|$. [数学考研竞赛00910]

25. 已知 a,b,c 两两不同, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$$

的充分必要条件是 ____ . [数学考研竞赛00951]

26. 设 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

(1)、计算 D_1,D_2,D_3 , (2)、从第 1 问中找规律, 正确计算 D_4 . [数学考研竞赛00956]

27.

28. 已知 $c^2-4ab\neq 0$, 计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} c & a & & & \\ b & c & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & c & a \\ & & & b & c \end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛01050]

29. 设 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=1,$$

且满足 $a_{ij}=-a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n$. 对任意的 x , 求 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

[数学考研竞赛01072]

30. 试计算矩阵 $A=(\sin(\alpha_i+\alpha_j))_{n\times n}$ ($n\geqslant 2$) 的行列式. [数学考研竞赛01155]

31. 设 A,B 均为 n 阶实正交阵, 证明 $|\det(A+B)|\leqslant 2^n$. [数学考研竞赛01197]

线性方程组

1. 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, B 是非零的 $m \times 1$ 阶矩阵. 考虑线性方程组 $AX = B$, 其中 X 是变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的列向量. 证明: (1) 线性方程组 $AX = B$ 的任意有限个解向量 $X_1, \cdots, X_k$ 的向量组的秩 $\leqslant n - r + 1$. (2) 若线性方程组 $AX = B$ 有解, 则它有 $n - r + 1$ 个解向量是线性无关的. [数学考研竞赛00097]

2. 问 a, b 取何值时, 线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & ax_2 & + & 4x_3 & = & b \end{array}\right.$$

有解? 有唯一解? 有无穷解? 当有解时, 求出全部解. [数学考研竞赛00643]

3. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}, \alpha_{n-r+1}$ 是 n 元非齐次线性方程组 $AX = B$ 的 $n - r + 1$ 个线性无关的解向量, 且 $\operatorname{rank}(A) = r$. 问 $\alpha_1 - \alpha_{n-r+1}, \cdots, \alpha_{n-r} - \alpha_{n-r+1}$ 是否为导出组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 并说明理由. [数学考研竞赛00666]

4. 求下列线性方程组的全部解, 并写出对应齐次方程组的基础解系 @跟锦数学微信公众号

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 7x_5 & = & 9 \end{array}\right. .$$

[数学考研竞赛00691]

5. 设 γ_0 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ (β 为非零向量) 的一个解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是其导出组 $AX = 0$ 的一个基础解系. 证明: (1)、 $\gamma_0, \beta_1 = \gamma_0 - \eta_1, \beta_2 = \gamma_0 - \eta_2, \cdots, \beta_t = \gamma_0 - \eta_t$ 是线性方程组 $AX = \beta$ 的一组线性无关的解; (2)、线性方程组 $AX = \beta$ 的任一解都可以表示为 @跟锦数学微信公众号

$$k_0\gamma + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t,$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1 - k_0$. [数学考研竞赛00741]

6. 已知方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 2 \\ 2 & 2 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

有无穷多组解, 则 $t=$ ____ . [数学考研竞赛00792]

7. 已知齐次线性方程 $AX=0$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, A=\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^n a_i \neq 0,$$

则 ____ . A. 当 $\sum_{i=1}^n a_i+b\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时, 方程只有零解; B. 当 $\sum_{i=1}^n a_i+b\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时, 方程只有非零解; C. 当 $\sum_{i=1}^n a_i+b=0$ 且 $b\neq 0$ 时, 方程只有零解; D. 当 $\sum_{i=1}^n a_i+b=0$ 且 $b=0$ 时, 方程只有零解. [数学考研竞赛00795]

8. 对于线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} \tau x_1 + x_2 + x_3 = \tau-3 \\ x_1+\tau x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\tau x_3=-2 \end{cases},$$

讨论 τ 为何值时, 方程组无解, 有唯一解, 有无穷多解; 在无穷多组解时给出通解. [数学考研竞赛00804]

9. 讨论线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda, \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1 \end{cases}$$

的解的情况, 并在有解时求其解. [数学考研竞赛00852]

10. 求 a,b 的值, 使下列非齐次线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 = a, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 7x_4 - 5x_5 = b \end{cases}$$

有解, 并在它有解的情况下, 用它的一个解和它的导出组的一个基础解系表示它的全部解. [数学考研竞赛00861]

矩阵

1. 设 @跟锦数学微信公众号

$$A^3 = 2E, B = A^2 - 2A + 2E,$$

求 B^{-1}. [数学考研竞赛00047]

2. 设 $A = (a_{ij})$, 且定义 @跟锦数学微信公众号

$$\nabla_A f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right).$$

试证: (1) $\nabla_A \mathrm{tr}\,(AB) = B^T$; (2) $\nabla_A \mathrm{tr}\,(ABA^TC) = CAB + C^TAB^T$. [数学考研竞赛00067]

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 试证: $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$, 并计算 A^{100} . [数学考研竞赛00079]

4. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵. (1) 证明 $\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件是 AB 可逆; (2) 若 $\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$ 可逆, 求出 $\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$ 的逆. [数学考研竞赛00090]

5. (1) 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 任取 A 的 r 个线性无关的行向量, 再取 A 的 r 个线性无关的列向量, 试证它们对应的行列构成的 r 阶子式不为零. (2) 设对称矩阵 A 的秩为 r , 试证: A 有一个非零的 r 阶主子式. [数学考研竞赛00091]

6. 设 A 是 n 阶半正定矩阵, 试证:

$$a_{ii}=0 \Rightarrow a_{kl}=0,\ k=i \text{ 或 } l=i.$$

这即说明: 若半正定矩阵某对角元为 0 , 则其所在的行与列中的元素均为 0 . [数学考研竞赛00095]

7. 设 A 为 n 阶实矩阵, $\lambda_t=r+s\mathrm{i}$ 是 A 的特征根, 其中 r,s 是实数, i 是虚数单位. (1) 证明: $\frac{1}{2}(A+A^T)$ 的特征根都是实数; 令 $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$ 是 $\frac{1}{2}(A+A^T)$ 的全部特征根; (2) 证明: $\mu_1\leqslant r\leqslant\mu_n$. (3) 你有类似的估计 s 的办法吗? [数学考研竞赛00098]

8. 设 A 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵, 向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ (实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维列空间), 使得

$$\alpha, A\alpha, A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵 B 满足条件 $AB=BA$. 证明: (1) 存在实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $B\alpha=f(A)\alpha$; (2) 对于 (1) 中找到的多项式 $f(x)$, 必有 $B=f(A)$. [数学考研竞赛00099]

9. 设 A 是 n 阶方阵, $b\neq 0$ 是 n 维列向量, 适合 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=r$. 记 $Ax=b$ 的所有解集合为 S , 试证: (1) S 中含有 $n-r+1$ 个线性无关的向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$; (2) ξ 是 S 中元素的充要条件是存在 k_i $(1\leqslant i\leqslant n-r+1)$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i=1,\ \xi=\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i\eta_i$. [数学考研竞赛00100]

10. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, A 是一个 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵, 这里 n 是大于 1 的正整数. 用 E_{ij} 表示 (i,j) 位置为 1 其余位置为 0 的 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵. 证明以下 3 条等价: (1) A 和所有 $\mathbb{F}$ 方阵相乘可交换; (2) A 和所有可逆 $\mathbb{F}$ 方阵相乘可交换; (3) A 和所有的 E_{ij} (其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 但是 $i\neq j$) 相乘可交换. [数学考研竞赛00138]

11. 设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间,

$$F=\begin{pmatrix}0 & & & & -a_n\\ 1 & 0 & & & -a_{n-1}\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & 0 & -a_2\\ & & & 1 & -a_1\end{pmatrix}.$$

(1)、假设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

若 $AF=FA$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E.$$

(2)、求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间 @跟锦数学微信公众号

$$C(F)=\left\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}; FX=XF\right\}$$

的维数. [数学考研竞赛00175]

12. 设 A,B 均为 n 阶半正定实对称矩阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$n-1\leqslant \operatorname{rank}(A)\leqslant n.$$

证明: 存在实可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 和 $C^{\mathrm{T}}BC$ 均为对角阵. [数学考研竞赛00201]

13. 设 @跟锦数学微信公众号

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 $X^2=B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵. [数学考研竞赛00216]

14. 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵 (未必对称), 对任一 n 维实向量 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), \alpha A\alpha^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

(这里 α^{T} 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β 使得 $\beta A\beta^{\mathrm{T}}=0$. 同时对任意 n 维实向量 x 和 y , 当 $xAy^{\mathrm{T}}\neq 0$ 是有 @跟锦数学微信公众号

$$xAy^{\mathrm{T}}+yAx^{\mathrm{T}}\neq 0.$$

证明: 对任意 n 维实向量 v , 都有 $vA\beta^{\mathrm{T}}=0$. [数学考研竞赛00220]

15. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$. [数学考研竞赛00253]

16. 设 A, B 分别是 3×2 和 2×3 实矩阵, 若 @跟锦数学微信公众号

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 BA . [数学考研竞赛00268]

17. 设 $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个矩阵集合, 称它们在 $\mathbb{F}$ 上相似: 如果存在 $\mathbb{F}$ 上与 $i \in I$ 无关的可逆矩阵 P 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^{-1}A_iP = B_i, \forall\ i \in I.$$

证明: 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上两个矩阵集合 $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$, 如果它们在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似, 则它们在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上也相似. [数学考研竞赛00269]

18. 设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵, @跟锦数学微信公众号

$$P(t) = At^2 + Bt + C, f(t) = \det P(t),$$

其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 是 $f(t)$ 的根, 证明: λ 的实部为负数.[数学考研竞赛00284]

19. 已知实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明: (1)、矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $\begin{cases} a \neq 2, \\ b = \frac{4}{3}; \end{cases}$ (2)、 A 相似于 B 的充要条件是 $\begin{cases} a = 3, \\ b = \frac{2}{3}; \end{cases}$ (3)、 A 合同于 B 的充要条件是 $\begin{cases} a < 2, \\ b = 3. \end{cases}$ [数学考研竞赛00287]

20. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 记 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若 $|A|=-12$, A 的特征值的和为 1 , 且 $(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 为 $(A^*-4I)x=0$ 的一个解. 试给出一正交变换 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

使得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准型.[数学考研竞赛00303]

21. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$, 其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $\operatorname{rank}(A+B)=3$, 试求常数 a 的值. [数学考研竞赛00351]

22. 设 A,B 是二个 n 阶正定矩阵. 求证 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$. [数学考研竞赛00356]

23. 设 m 为给定的正整数. 证明: 对任何的正整数 n,l , 存在 m 阶方阵 X 使得 @跟锦数学微信公众号

$$X^n+X^l=I+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[数学考研竞赛00362]

24. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\mathrm{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0 . 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11}=$ ____ . [数学考研竞赛00377]

25. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2\\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix};\ z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 表复数域. 试证: $\forall\ A\in\Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P\in\Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$. [数学考研竞赛00379]

26. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\mathrm{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0 . 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11}=$ ____ . [数学考研竞赛00386]

27. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2\\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix};\ z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 表复数域. 试证: $\forall\ A\in\Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P\in\Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$. [数学考研竞赛00388]

28. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, 则 $A^{50}=$ ____ . [数学考研竞赛00399]

29. 设 A_1,A_2,B_1,B_2 均为 n 阶方阵, 其中 A_2,B_2 可逆. 证明: 存在可逆矩阵 P,Q 使得 @跟锦数学微信公众号

$$PA_iQ=B_i\ \ (i=1,2)$$

成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似. [数学考研竞赛00404]

30. A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\mathrm{tr}\,A^i=i$, $i=1,2,3,4$. 求 A 的行列式. [数学考研竞赛00409]

31. 设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程 @跟锦数学微信公众号

$$X+AX-XA^2=0$$

只有零解. [数学考研竞赛00410]

32. 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016}=I_2,$$

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X=$ ____ . [数学考研竞赛00427]

33. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵. 证明: $\operatorname{tr}\left((AB^2)\right)\leqslant\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)$. [数学考研竞赛00429]

34. 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016}=I_2,$$

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X=$ ____ . [数学考研竞赛00436]

35. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵. 证明: $\operatorname{tr}\left((AB^2)\right)\leqslant\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)$. [数学考研竞赛00438]

36. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值, $f(x)$ 为多项式, 则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值为 ____ . [数学考研竞赛00449]

37. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times p$ 矩阵, C 是 $p\times q$ 矩阵. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B)\leqslant\operatorname{rank}(ABC),$$

其中 $\operatorname{rank}(X)$ 表示矩阵 X 的秩. [数学考研竞赛00453]

38. 设 n 为奇数, A,B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA=0$. 记 $A+J_A$ 的特征值集合为 S_1 , $B+J_B$ 的特征值集合为 S_2 , 其中 J_A,J_B 分别表示 A 和 B 的 Jordan 标准形. 求证: $0\in S_1\cup S_2$. [数学考研竞赛00457]

39. 记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ . $\forall\ A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\bigcup\limits_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 $=$ ____ . [数学考研竞赛00475]

40. 设 n 阶方阵 A,B 满足: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(ABA)=\operatorname{rank}(B).$$

证明: AB 与 BA 相似. [数学考研竞赛00477]

41. 记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 $\boldsymbol{\Gamma}$. $\forall\ \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Gamma}$, a_{21} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\bigcup\limits_{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Gamma}}\{a_{21}\}$ 的最小元 $=$ ____ . [数学考研竞赛00484]

42. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABA})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似. [数学考研竞赛00486]

43. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆反对称矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 元列向量, 设 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=$ ____ . [数学考研竞赛00496]

44. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明: 若存在正整数 k , 使 $\boldsymbol{A}^k=0$ (0 为零矩阵), 则行列式 $|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. [数学考研竞赛00502]

45. 设 $\boldsymbol{\Gamma}=\{\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即, $\forall\ \boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{\Gamma}$, 有 $\boldsymbol{MN}\in\boldsymbol{\Gamma}$), 证明: $\sum\limits_{i=1}^{r}\boldsymbol{W}_i=0$ 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(\boldsymbol{W}_i)=0$, 其中 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{W}_i)$ 表示 $\boldsymbol{W}_i$ 的迹. [数学考研竞赛00506]

46. 给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即, $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 等于 $-\boldsymbol{A}$), 记矩阵有序对集合 $\boldsymbol{T}$ 为 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{T}=\left\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y});\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{XY}=a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\right\},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合. 证明: 任取 $\boldsymbol{T}$ 中两元: $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 和 $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$, 必有 $\boldsymbol{XN}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\neq 0$. [数学考研竞赛00507]

47. 设实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{H}_{n+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_n&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{H}_n\end{pmatrix},n\geqslant 2,$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是与 $\boldsymbol{H}_n$ 通解的单位方阵, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{H}_4)=$ ____ . [数学考研竞赛00520]

48. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶复方阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA},\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}.$$

(1)、证明: C 是幂零方阵; (2)、证明: A,B,C 同时相似于上三角阵; (3)、若 $C\neq 0$, 求 n 的最小值. [数学考研竞赛00525]

49. 设实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix},n\geqslant 2,$$

其中 I 是与 H_n 通解的单位方阵, 则 $\mathrm{rank}\,(H_4)=$ ____ . [数学考研竞赛00529]

50. 设 A,B,C 均为 n 阶复方阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$AB-BA=C,AC=CA,BC=CB.$$

(1)、证明: C 是幂零方阵; (2)、证明: A,B,C 同时相似于上三角阵; (3)、若 $C\neq 0$, 求 n 的最小值. [数学考研竞赛00534]

51. 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A,B 皆为整矩阵. (1)、证明以下两条等价: (1-1)、 A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵; (1-2)、 A 的行列式的绝对值为 1 . (2)、若又知 @跟锦数学微信公众号

$$A,A-2B,A-4B,\cdots,A-2nB,A-2(n+1)B,\cdots,A-2(n+n)B$$

皆可逆, 且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵. 证明: $A+B$ 可逆. [数学考研竞赛00555]

52.

53. 设 A 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有 @跟锦数学微信公众号

$$A=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00569]

54. 设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t . 则 t 最多为 ____ . [数学考研竞赛00572]

55. 证明:任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 @跟锦数学微信公众号

$$A=A_0+A_1+A_2,$$

其中 $A_0=aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵. [数学考研竞赛00574]

56. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00578]

57. 设 $\boldsymbol{U}$ 为 8 阶实正交方阵, $\boldsymbol{U}$ 中元素皆为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t . 则 t 最多为 $\underline{\qquad}$. [数学考研竞赛00581]

58. 证明:任意 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,$$

其中 $\boldsymbol{A}_0=a\boldsymbol{I}_n$, a 是实数, $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 都是幂零方阵. [数学考研竞赛00583]

59. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶幂零矩阵, 即满足 $\boldsymbol{A}^2=0$. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r , 且 $1\leqslant r<\frac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}_r&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{I}_r$ 为 r 阶单位矩阵. [数学考研竞赛00600]

60. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$ ($\boldsymbol{I}_n$ 表示单位矩阵), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对合矩阵. 试证: (1)、若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对合矩阵, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\right)+\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\right)=n;$$

(2)、 n 阶对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化, 其相似对角形为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&-\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix},$$

其中 $r=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\right)$. (3)、若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶对合矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 同时为对角矩阵. [数学考研竞赛00612]

61. 令 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\1&&&&0\end{pmatrix}.$$

是一个 n 级矩阵, 计算 $A^2, A^3, \cdots, A^{n-1}$. [数学考研竞赛00644]

62. 设 A, B 都是 n 级矩阵, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

[数学考研竞赛00645]

63. 设 A 是 n 级正定实矩阵, 证明: 当 $n > 1$ 时, 伴随矩阵 A^* 是正定矩阵. [数学考研竞赛00646]

64. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上 3 维线性空间, V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

求 σ 的特征值和特征向量. 又问: σ 可否对角化? 若可对角化, 求 C 使得 $C^{-1}AC$ 成对角形. [数学考研竞赛00650]

65. 设 A 是 $n \times (n+1)$ 矩阵, E_n 是 n 阶单位矩阵, 证明: 存在 $(n+1) \times n$ 矩阵 B 使得 $AB = E_n$ 的充要条件是 A 的秩为 n . [数学考研竞赛00667]

66. 证明: n 阶实矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件是存在一个正定矩阵 B 使得 $A = B^2$. [数学考研竞赛00668]

67. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = E$, 证明: 存在正交阵 T 使得 @跟锦数学微信公众号

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix},$$

其中 T^{T} 是 T 的转置. [数学考研竞赛00671]

68. 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A, B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

[数学考研竞赛00692]

69. 设 $A^{\mathrm{T}} = A$, 证明: A 可逆当且仅当存在矩阵 B , 使得 $AB + B^{\mathrm{T}}A$ 正定. [数学考研竞赛00694]

70. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角形. [数学考研竞赛00695]

71. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&4&2\\3&-6&-3\end{pmatrix}$ 的初等因子与若尔当典范形. [数学考研竞赛00696]

72. 设 A,B 是 $n\times n$ 矩阵，且 $A^2=B^2=E$ (E 是 n 阶单位矩阵)，且 $|A|+|B|=0$. 证明：$A+B$ 不是可逆矩阵. [数学考研竞赛00698]

73. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的正惯性指数为 ____ . [数学考研竞赛00714]

74. 设 A 为 n 阶方阵，证明：(1)、(10 分) 若 k 是正整数，α 是 $A^{k+1}X=0$ 的解，α 不是 $A^kX=0$ 的解，则 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^k\alpha$ 线性无关；(2)、(5 分) 当正整数 $k\geqslant n$ 时，必有 $\operatorname{rank}\left(A^{k+1}\right)=\operatorname{rank}\left(A^k\right)$. [数学考研竞赛00720]

75. 设矩阵 A 的伴随矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix},$$

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$. (1)、(5 分) 计算行列式 $|A|$; (2)、(10 分) 求矩阵 B . [数学考研竞赛00721]

76. 已知矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\a_1&b&2&0\\a_2&b_1&c&2\end{pmatrix}$$

与对角矩阵相似. 问：a,a_1,a_2,b,b_1,c 满足什么条件？[数学考研竞赛00722]

77. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}$. (1)、 (9 分) 求出 A 的特征矩阵的等价标准形; (2)、 (9 分) 写出 A 的不变因子, 行列式因子, 初等因子; (3)、 (6 分) 写出 A 的特征多项式和极小多项式; (4)、 (6 分) 写出 A 的有理标准型和若尔当标准形. [数学考研竞赛00723]

78. 设 A 为 n 阶方阵, $n\geqslant 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵. 证明: (1)、若 $|A|=0$, 则 $\operatorname{rank}(A^*)\leqslant 1$; (2)、 $|A^*|=|A|^{n-1}$, 且 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$. [数学考研竞赛00742]

79. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 行列式 $|A-3E|=0$, 向量 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解. (1)、求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵; (2)、求矩阵 A 及行列式 $|(A+A^*-2E)^{1010}|$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位阵. [数学考研竞赛00744]

80. 设 A,C 是 n 阶正定矩阵, 实矩阵 B 是矩阵方程 $AX+XA=C$ 的唯一解. 证明: (1)、 B 是正定矩阵; (2)、存在 n 个线性无关的 n 维行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$B=\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2+\cdots+\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n,$$

其中 α_i^{T} 表示 α_i 的转置, $i=1,\cdots,n$. [数学考研竞赛00745]

81. 设 J 为一个 k 级若尔当 (Jordan) 块. 证明: (1)、存在 k 级幂零矩阵 P (即存在正整数 s , 使得 $P^s=0$) 及对角矩阵 U , 使得 $J=P+U$; (2)、任一 n 阶复方阵 A 都可以分解称为 $A=B+C$, 其中 B 是幂零矩阵, C 相似于对角矩阵, 且 $BC=CB$. [数学考研竞赛00746]

82. 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix},$$

A^* 是 A 的伴随矩阵, E 为单位矩阵, 求矩阵 B . [数学考研竞赛00761]

83. 已知矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&a&2\\2&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&b\end{pmatrix},$$

问 a,b 为何值时, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. [数学考研竞赛00762]

84. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&\varepsilon&0\\b&c&\varepsilon^2\end{pmatrix}$, 这里 a,b,c 是任意数, $\varepsilon=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 求 $\boldsymbol{A}^{1000}$. [数学考研竞赛00763]

85. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=0$. (1)、求证 $\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 可逆, 并求逆; (2)、讨论 $\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{E}$ 的可逆性. [数学考研竞赛00764]

86. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-4&6&-14\\1&-1&1&-5\\0&0&2&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. (1)、求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子, 初等因子和最小多项式. (2)、求 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形. [数学考研竞赛00766]

87. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ ____ . [数学考研竞赛00787]

88. 设矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&6&7\\8&9&4\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{2019}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{2020}=$ ____ . [数学考研竞赛00788]

89. 矩阵 $\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值为 ____ . [数学考研竞赛00790]

90. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩 $\operatorname{rank}(A)=$ ____ . [数学考研竞赛00791]

91. 设 A,B 是四阶方阵, $\operatorname{rank}(A)=3,\operatorname{rank}(B)=4$, 它们的伴随矩阵是 A^*,B^* , 则 $\operatorname{rank}(A^*B^*)=$ ____ . A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 [数学考研竞赛00796]

92. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 则 ____ . A. 当 $m>n$ 时, 方阵 AB 可逆; B. 当 $m>n$ 时, 方阵 AB 不可逆; C. 当 $m=n$ 时, 方阵 AB 不可逆; D. 当 $m<n$ 时, 方阵 AB 不可逆. [数学考研竞赛00797]

93. 已知二阶实对称矩阵 A 的一个特征向量是 $(-3,1)^{\mathrm{T}}$, 且 $|A|<0$, 则下面向量中必为 A 的特征向量的是 ____ . A. $c(-3,1)^{\mathrm{T}},c\neq 0$ B. $c(1,3)^{\mathrm{T}},c\neq 0$ C. $c_1(1,3)^{\mathrm{T}}+c_2(-3,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\neq 0$ D. $c_1(1,3)^{\mathrm{T}}+c_2(-3,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2$ 有一个为零, 但不同时为零 [数学考研竞赛00798]

94. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充要条件是 ____ . A. $a=0,b=2$ B. $a=0,b$ 为任意实数 C. $a=0,b=0$ D. $a=2,b$ 为任意实数 [数学考研竞赛00799]

95. 设 A,B 均为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2=A,B^2=B,(A+B)^2=A+B$, 证明: 矩阵 AB 是零矩阵. [数学考研竞赛00802]

96. 设 n 阶可逆方阵 A 的各行元素之和为 m , 证明或求解: (1)、 $m\neq 0$; (4 分) (2)、 A^{-1} 各行元素之和为 $\dfrac{1}{m}$; (4 分) (3)、求 $2A^{-1}-5A$ 的各行元素之和. (5 分) [数学考研竞赛00805]

97. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&5\\3&1\end{pmatrix},$$

求矩阵 X . [数学考研竞赛00854]

98. 设正定的实对称矩阵 A 是正交矩阵, 证明 A 为单位矩阵. [数学考研竞赛00857]

99. 设 A 是正交矩阵. (1)、举例说明 A 未必有实特征值; (2)、若 A 有实特征值 λ , 那么 $\lambda=1$ 或 -1 . [数学考研竞赛00865]

100. A 是 n 阶实对称矩阵, 证明 A 可逆充要条件是存在矩阵 B 使得 $AB+B^{\mathrm{T}}A$ 是正定矩阵. [数学考研竞赛00866]

101. 设矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&t&1\\-2&2&t\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\-t\end{pmatrix}.$$

当 t 为何值时, 方程组 $AX=b$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解, 并给出有解时相应的解. [数学考研竞赛00881]

102. 设 A 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶矩阵, 若 $A^2=E_n$ (E_n 为单位阵), 则称 A 为对合阵. 证明: (1)、若 A 是 n 阶对合阵, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(E_n+A)+\operatorname{rank}(E_n-A)=n.$$

(2)、 n 阶对合阵 A 一定可以对角化, 其相似标准形为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}E_r&\\&-E_{n-r}\end{pmatrix},$$

其中 $r=\operatorname{rank}(E_n+A)$. [数学考研竞赛00884]

103. 设矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

(1)、矩阵 A 可能有怎样的若尔当标准形? (2)、求当 x 为何值时, A 可相似对角化? (3)、当 $x=1$ 时, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP=J$, 其中 J 为 A 的若尔当标准形. [数学考研竞赛00888]

104. 已知 $ABA=C$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

试求 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{B}^*$. [数学考研竞赛00911]

105. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2020 & 2020\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & a & 4\end{pmatrix}$$

有一个二重特征值. (1)、求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式以及若尔当标准形. (2)、若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵, 求 $\boldsymbol{A}^{2020}$. [数学考研竞赛00912]

106. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}^r=0$ ($r\in\mathbb{N}^+$). 证明: $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵. [数学考研竞赛00913]

107. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为复数域上的 n 阶方阵, 且存在正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{E}$. 证明: (1)、$\boldsymbol{A}$ 与对称矩阵相似. (2)、 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 m 次单位根. [数学考研竞赛00916]

108. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2 & a_3+2b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ____ . [数学考研竞赛00952]

109. 设数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 1 & 7\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 6 & -1 & -6\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$. [数学考研竞赛00957]

110. 设实对称矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵. [数学考研竞赛00958]

111. 用 r_A 表示方阵 A 的秩, A,B 都是 n 阶方阵, 证明: (1)、 $\mathrm{r}_{AB}\geqslant \mathrm{r}_A+\mathrm{r}_B-n$; (2)、如果 $\mathrm{r}_{A^2}=\mathrm{r}_{A^3}$, 则有 $\mathrm{r}_{A^3}=\mathrm{r}_{A^4}$. [数学考研竞赛00960]

112. 设 n,k 是整数, $n>2$, $1\leqslant k\leqslant n$. 设复数 ω 满足 $\omega^n=1$ 但是 $\omega^T\neq 1$ 对任意 $t=1,\cdots,n-1$ (称这样的 ω 为 n 次本原单位根). 令 $A=(\omega^{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 是一个 n 阶方阵. 令 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 是由 A 的第 i_1 行, $\cdots$, 第 i_k 行和第 j_1 列, $\cdots$, 第 j_k 列的交叉位置的元素构成的 k 阶子矩阵, 这里 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$. (1) 证明: 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, $A\begin{pmatrix}1\cdots k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵. (2) 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 以及对任意的 @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n,1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n,$$

$A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 一定可逆吗? 如果是, 给出证明; 如果不是, 给出反例. [数学考研竞赛00966]

113. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵, 适合 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$. 试证: $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}(BC)$. [数学考研竞赛00973]

114. 设 A 是 n 级正交矩阵且 $|A|=1$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=a_0x_n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

是 A 的特征多项式. 证明: (1)、当 n 为偶数时, 对任意的 $0\leqslant i\leqslant n$, 有 $a_i=a_{n-i}$. (2)、当 n 为奇数时, 对任意的 $0\leqslant i\leqslant n$, 有 $a_i=-a_{n-i}$. (3)、当 $n=2$ 时, 存在正交矩阵 B 使得 $A=B^2$. [数学考研竞赛00979]

一些性质 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 则 A 的迹 (trace) 为 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

它有如下性质: (1) [线性泛函] $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^T)$, $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$, $\mathrm{tr}(cA)=c\cdot\mathrm{tr}(A)$, $\forall\, c\in\mathbb{F}$; (2) [相似不变量] 若 A,B 相似, 则 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$; (3) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$; (4) $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^TB)$ 是 n 阶实方阵全体构成的实线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 上的内积. [数学考研竞赛00995]

115. 设 A,B 都是 n 阶实方阵, A 半正定, B 半负定, 则 $\mathrm{tr}(AB)\leqslant 0$. [数学考研竞赛01000]

116. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵. 若 n 是奇数, 试证: $|A|=0$. [数学考研竞赛01004]

117. 设 A 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\,(A)=\mathrm{r}\,(A^TA)=\mathrm{r}\,(AA^T).$$

[数学考研竞赛01005]

118. 设 A,B 为半正定矩阵, 且 $\mathrm{tr}\,(AB)=0$, 求证: 对任意正整数 m, 都有 $(A+B)^m=A^m+B^m$. [数学考研竞赛01006]

119. 设 A,B 是 n 阶实半正定矩阵, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\,(A+B)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\mathrm{r}\,(A,B).$$

[数学考研竞赛01007]

120. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵, α 是 n 维列向量. 若 n 是偶数, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$|A+x\alpha\alpha^T|=|A|.$$

[数学考研竞赛01008]

121. 设 A,B 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 满足 $A^TB+B^TA=0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\,(A+B)\geqslant\max\left\{\mathrm{r}\,(A),\mathrm{r}\,(B)\right\}.$$

[数学考研竞赛01009]

122. 已知 A 为三阶实正交矩阵, $\det A=1$. 试证: 存在正交矩阵 P , 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$\cos\theta=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}.$$

[数学考研竞赛01014]

123. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对合阵, 即 $A^2=E_n$. 试证; $n-\operatorname{tr}A$ 是偶数; 且 $\operatorname{tr}A=n\Leftrightarrow A=E_n$. [数学考研竞赛01041]

124. 设方阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&a&0\\a-2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

可对角化, 求 a 的值. [数学考研竞赛01042]

125. 设 $A_1,\cdots,A_n\in M_n(\mathbb{F})$, $g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $g(A_1),\cdots,g(A_n)$ 都是非异阵. 证明: 存在 $h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $g(A_i)^{-1}=h(A_i)$ 对所有的 $1\leqslant i\leqslant m$ 都成立. [数学考研竞赛01043]

126. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$, 定义 $C=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$. 证明: 若 A,B 半正定, 则 C 半正定. [数学考研竞赛01051]

127. 设 A 为 $s\times n$ 矩阵. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$s-\mathrm{r}\left(E_s-AA^T\right)=n-\mathrm{r}\left(E_n-A^TA\right).$$

[数学考研竞赛01073]

128. 设 $f(x)$ 为 A 的特征多项式, 且存在互素的次数分别为 p,q 的多项式 $g(x),h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)h(x)$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\left[g(A)\right]=q,\quad \mathrm{r}\left[h(A)\right]=p.$$

[数学考研竞赛01076]

129. 设 A,B 都是实反对称矩阵, 且 A 可逆, 则 $|A^2-B|>0$. [数学考研竞赛01095]

130. 设 X,Y 分别为 $m\times n$ 与 $n\times m$ 阵, 且 @跟锦数学微信公众号

$$YX=E_n,\quad A=E_m+XY.$$

证明: A 相似于对角阵. [数学考研竞赛01096]

131. 设 A 为 n 阶正定矩阵, x , y 为 n 维列向量且满足 $x^Ty>0$. 试证: 矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$M=A+\frac{xx^T}{x^Ty}-\frac{Ayy^TA}{y^TAy}$$

正定. [数学考研竞赛01098]

132. 设 $x \neq 0$, 矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}(A^n - E)$. [数学考研竞赛01119]

133. 设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵, 即 $A^* \equiv \bar{A}^T = A$. 试证: (1) $\alpha^* A\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}^n$; (2) A 的特征值均为实数; (3) $\|(A \pm \mathrm{i}E)\alpha\|^2 = \|A\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}^n$; (4) $A \pm \mathrm{i}E$ 可逆; (5) $B = (A - \mathrm{i}E)(A + \mathrm{i}E)^{-1}$ 是酉矩阵, 即 $B^*B = BB^*$; (6) $E - B$ 可逆; (7) $A = \mathrm{i}(E + B)(E - B)^{-1}$. [数学考研竞赛01133]

134. 设 B 是 n 阶酉矩阵, 满足 $\mathrm{r}\,(E - B) = n$. 试证: 存在唯一的 n 阶 Hermite 矩阵 A 使得 $(A - \mathrm{i}E)(A + \mathrm{i}E)^{-1} = B$. [数学考研竞赛01134]

135. 域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵 A 称为幂等矩阵, 如果 $A^2 = A$. 试证: 若 A 幂等, 则 A 可对角化, 且 $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{tr}\,(A)$. [数学考研竞赛01138]

角化定理 任意复方阵都酉相似于某个上三角阵. [数学考研竞赛01156]

分解定理 任一正规矩阵都酉相似与一个对角矩阵, 即 @跟锦数学微信公众号

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A^*A = AA^*$

$\Rightarrow$ 存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, s.t. $U^*AU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 λ_i 是 A 的特征值

[数学考研竞赛01157]

136. 设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx$ ($x \in \mathbb{R}^{2020}$) 的解空间维数为 3 . 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论. [数学考研竞赛01160]

137. 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geqslant 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素. [数学考研竞赛01166]

138. 对任两酉阵 U, V , 有 @跟锦数学微信公众号

$$\|A\|_F = \|UAV\|_F .$$

[数学考研竞赛01178]

139. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix} E_r & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩为 r , 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组, $(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)b$. [数学考研竞赛01183]

140. 设 A,B 都是 n 阶矩阵, $AB=BA=0$, $\mathrm{r}\left(A^2\right)=\mathrm{r}\left(A\right)$. 证明: $\mathrm{r}\left(A+B\right)=\mathrm{r}\left(A\right)+\mathrm{r}\left(B\right)$. [数学考研竞赛01198]

141. 设实对称矩阵 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式都大于 0 , 但 $\det A=0$. 证明: A 半正定. [数学考研竞赛01199]

142. 证明: 任何一个复矩阵可以表为两个对称矩阵的乘积, 且其中一个为可逆矩阵. [数学考研竞赛01219]

143. 已知矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 Q 和对角线元素为负的上三角矩阵 R , 使 $A=QR$. [数学考研竞赛01222]

144. 设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=(E-A^*)^{-1}(E+A^*),$$

则 $|B-E|=$ ____ . [数学考研竞赛01240]

二次型

1. 设 @跟锦数学微信公众号

$$l_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n,\quad i=1,2,\cdots,p+q,$$

这里 $c_{ij}\in\mathbb{R}$. 试证明实二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$$

的正惯性指数 $\leqslant p$, 负惯性指数 $\leqslant q$. [数学考研竞赛00094]

2. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$,其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题: (1)、 A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子. (2)、当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型. [数学考研竞赛00332]

3. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$,其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题: (1)、 A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子. (2)、当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型. [数学考研竞赛00338]

4. 实二次型 $2x_1x_2-x_1x_3+5x_2x_3$ 的规范型 $=$ ____ . [数学考研竞赛00374]

5. 实二次型 $2x_1x_2-x_1x_3+5x_2x_3$ 的规范型 $=$ ____ . [数学考研竞赛00383]

6. 设二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵 A 为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix},$$

其中 $n>1, a\in\mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 ____ . [数学考研竞赛00523]

7. 设二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵 A 为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\ a&1&\cdots&a\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a&a&\cdots&1\end{pmatrix},$$

其中 $n>1, a\in\mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 ____ . [数学考研竞赛00532]

8. 设 @跟锦数学微信公众号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$H(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}, n\geqslant 2.$$

(1)、证明: 对任一非零 $x\in\mathbb{R}^n, H(x)>0$; (2)、求 $H(x)$ 满足条件 $x_n=1$ 的最小值. [数学考研竞赛00550]

9. $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实方阵, 满足 (1)、 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$; (2)、对每个 i ($i=1,\cdots,n$), 有 $\sum_{j=1}^n|a_{ij}|+\sum_{j=1}^n|a_{ji}|<4a$. 求 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的规范形. [数学考研竞赛00554]

10. 已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\left(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2,$$

而 f 的规范形为 ____ . [数学考研竞赛00595]

11. 已知 f_1 为实 n 元正定二次型. 令 @跟锦数学微信公众号

$V=\{f;\ f$ 为实 n 元二次型, 满足:对任何实数 k 有 $kf+f_1$ 属于恒号二次型$\}$.

这里恒号二次型为 0 二次型, 正定二次型及负定二次型的总称. 证明: V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并求出这个向量空间的维数. [数学考研竞赛00605]

12. t 满足 ____ 时, 二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-t)x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$$

是正定的. [数学考研竞赛00715]

13. 用正交变换将二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形 (要求写出正交变换的矩阵和相应的标准形). [数学考研竞赛00765]

14. 已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3,$$

(1)、写出二次型 f 的矩阵表达式; (2 分) (2)、用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵. (12 分) [数学考研竞赛00806]

15. 用非退化线性替换化实二次型 $x_1^2-2x_1x_2-3x_2^2+2x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形, 并求正、负惯性指数及符号差. 判断它是否为正定二次型. [数学考研竞赛00853]

16. 用非退化线性替换化实系数二次型 @跟锦数学微信公众号

$$x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3$$

为标准形, 写出所作的非退化线性替换, 并指出正、负惯性指数及符号差. [数学考研竞赛00862]

17. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$$

为实 n 维非零列向量, 令 @跟锦数学微信公众号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^{\mathrm{T}}(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})x.$$

计算 (1)、若 α,β 线性相关, 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形; (2)、若 α,β 线性无关, 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形. [数学考研竞赛00883]

18. 设 A 为对称矩阵, 存在线性无关的向量 x_1, x_2 , 使得 $x_1^T A x_1 > 0$, $x_2^T A x_2 < 0$. 证明: 存在线性无关的向量 x_3, x_4 使得 x_1, x_2, x_3, x_4 线性相关, 且 $x_3^T A x_3 = x_4^T A x_4 = 0$. [数学考研竞赛01074]

19. 已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz$$

的秩是 2 , 求参数 b , 并指出方程 @跟锦数学微信公众号

$$f(x, y, z) = 4$$

表示什么曲面? [数学考研竞赛01174]

20. 已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f &= x^{\mathrm{T}} A x \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3 \end{aligned}$$

的秩为 2 , 且 1 是 A 的一个特征值, 求正交线性替换 $x = Qy$ 化二次型为标准形. [数学考研竞赛01241]

线性空间与线性变换

1. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 请简略说明一定存在正整数 m , 使得 $\mathscr{A}^{2m} V = \mathscr{A}^m V$. [数学考研竞赛00103]

2. 假设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 ($n > 0$), f, g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg - gf = f$, 证明: f 的特征值都是 0 , 且 f, g 有公共特征向量. [数学考研竞赛00176]

3. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $f_j : V \to \mathbb{C}$ $(j = 1, 2)$ 是非零的线性函数, 且线性无关. 证明: 任意的 $\alpha \in V$ 都可表为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f_1(\alpha) = f_1(\alpha_2), f_2(\alpha) = f_2(\alpha_1).$$

[数学考研竞赛00202]

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad \sigma_A(X) = AX - XA.$$

证明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间. [数学考研竞赛00236]

5. 设 $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \quad \forall\ X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型 @跟锦数学微信公众号

$$(-,-): M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

如下: $(X, Y) = \varphi(XY)$. (1)、证明 $(-,-)$ 是非退化的, 即若 $(X, Y) = 0, \forall\ Y \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = 0$. (2)、设 $A_1, \cdots, A_{n^2}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, $B_1, \cdots, B_{n^2}$ 是相应的对偶基, 即 @跟锦数学微信公众号

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

证明 $\sum\limits_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 是数量矩阵. [数学考研竞赛00238]

6. 设 $\mathbb{F}^n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维列空间, $\sigma: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ 是一个线性变换. 若对 $\mathbb{F}$ 上的任何 n 阶方阵 A, @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \ (\forall\ \alpha \in \mathbb{F}^n),$$

证明: $\sigma = \lambda\mathscr{E}$, 其中 λ 是 $\mathbb{F}$ 中某个数, $\mathscr{E}$ 表示 $\mathbb{F}^n$ 上的恒等变换. [数学考研竞赛00250]

7. 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i,j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 n 阶方阵, $i,j = 1,2,\cdots,n$. 记 Γ_r 表示秩为 r 的实方阵全体, $r = 0,1,2,\cdots,n$; 并让 $\phi: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(AB) = \phi(A)\cdot\phi(B), \quad \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

证明: (1)、对 $\forall\ A, B \in \Gamma_r$, 有 $\operatorname{rank}\phi(A) = \operatorname{rank}\phi(B)$. (2)、若 $\phi(0) = 0$, 且存在 $r = 1$ 的矩阵 W 使得 $\phi(W) = 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}, \quad \forall\ i,j = 1,2,\cdots,n.$$

[数学考研竞赛00320]

8. 设 n 阶实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

有 n 个线性无关的特征向量, $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 均不为 0 . 记 @跟锦数学微信公众号

$$W=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n};\ XA=AX\right\}.$$

证明: W 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 且 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 为其一组基, 其中 I 为 n 阶单位阵. [数学考研竞赛00333]

9. 设 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基, 令 @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}=0.$$

证明: (1)、对 $i=1,2,\cdots,n+1$, @跟锦数学微信公众号

$$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n\}$$

都构成 V 的一组基; (2)、 $\forall\ \alpha\in V$, 在 (1) 中点 $n+1$ 组基中, 闭存在一组基使得 α 在此基下的坐标分量均非负; (3)、若 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$

且 $|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同, 则在 (1) 中的 $n+1$ 组基中, 满足 (2) 中非负坐标表示的基是唯一的. [数学考研竞赛00611]

10. 设 V 是定义域为实数集 $\mathbb{R}$ 的一元实函数组成的集合, 对 $f,g\in V,\alpha\in\mathbb{R}$, 分别用下列式子定义 $f+g,\alpha f$: @跟锦数学微信公众号

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

(1) 证明 V 是数域上的线性空间. [数学考研竞赛00647]

11. (2) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f_0(x)=1,f_1(x)=\cos x,f_2(x)=\cos 2x,f_3(x)=\cos 3x.$$

判断 f_0,f_1,f_2,f_3 是否线性相关. [数学考研竞赛00648]

12. (3) 用 $L(f,g)$ 表示由 f,g 生成的子空间, 判断 $L(f_0,f_1)+L(f_2,f_3)$ 是否为直和. [数学考研竞赛00649]

13. 令 @跟锦数学微信公众号

$$V=\{f(x);f(x)\text{ 是实系数多项式且 } f(1)=0,\partial(f(x))\leqslant n\}.$$

证明: V 是实数域上线性空间, 并求 V 的一组基. [数学考研竞赛00669]

14. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, V_1 是 V 的非零子空间, 如果存在唯一的子空间 V_2 使得 $V=V_1\oplus V_2$, 证明: $V_1=V$. [数学考研竞赛00670]

15. 设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, 对于线性空间 $\mathbb{P}^n$ 上的线性变换 σ : @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(x_1,\cdots,x_n)=(0,x_2,\cdots,x_n).$$

证明: $\sigma^2=\sigma$, 并求 σ 的核. [数学考研竞赛00672]

16. 设 σ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 且 σ 在某组基下的矩阵为对角矩阵, $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 σ 的全部不同的特征值. 证明:存在 V 的线性变换 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma=\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_r\sigma_r,\quad \mathscr{E}=\sigma_1+\cdots+\sigma_r,$$

其中 $\mathscr{E}$ 为恒等变换. [数学考研竞赛00673]

17. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关. 证明: β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. [数学考研竞赛00693]

18. 记 @跟锦数学微信公众号

$$V=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};a,b\in\mathbb{C},a+d=0\right\},$$

对任一 $A\in V$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{T}$ 为:对任意 $X\in V$, $\mathscr{T}(X)=AX-XA$. 假设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 试求: $\mathscr{T}$ 的所有特征值以及这些特征值相对应的特征向量. [数学考研竞赛00697]

19. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是 3 维向量空间的两组基, 若向量 γ 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 与 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_1+x_2,\quad y_3=x_1+x_2+x_3,$$

则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 ____ . [数学考研竞赛00716]

20. 已知 $\mathbb{P}$ 是数域, 向量空间 $\mathbb{P}^3$ 上的线性变换 σ 为: 对 $\forall\ (a,b,c)\in\mathbb{P}^3$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c),$$

则线性变换 σ 的秩为 ____ . [数学考研竞赛00717]

21. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一组基, f 是 V 的一个线性变换, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(\varepsilon_1)=\varepsilon_3,f(\varepsilon_2)=\varepsilon_4,f(\varepsilon_3)=f(\varepsilon_4)=0.$$

(1)、写出 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵; (2)、求出 f 的值域 $f(V)$ 的维数及一组基; (3)、判断 $f(V)\cup f^{-1}(0)$ 是否为 V 的一个线性子空间? 并说明理由. [数学考研竞赛00743]

22. 设 V_1,V_2 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\forall\ (\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in V_1\times V_2$, $k\in\mathbb{P}$, 规定 @跟锦数学微信公众号

$$(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2),k(\alpha_1,\alpha_2)=(k\alpha_1,k\alpha_2).$$

(1)、证明 $V_1\times V_2$ 关于上述运算构成数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间; (2)、设 $\dim V_1=m,\dim V_2=n$, 求 $\dim(V_1\times V_2)$. [数学考研竞赛00767]

23. 设 A 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵, 其特征多项式为 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=(x-a)^{n-1}(x-b),$$

这里 $a\neq b$. 假设 A 的任意三个特征向量都是线性相关的. 对于 $\lambda\in\mathbb{C}$, 以及正整数 l , 证明: @跟锦数学微信公众号

$$V_{\lambda,l}=\left\{\alpha\in\mathbb{C}^n;(A-\lambda E_n)^l\alpha=0\right\}$$

是 $\mathbb{C}$ 上线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的 A 的不变子空间, 并求 $\mathbb{C}$ 上线性空间 $V_{\lambda,l}$ 的维数. [数学考研竞赛00768]

24. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充要条件是 ____ . A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关; B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能由其余向量线性表示; C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示; D. 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$. [数学考研竞赛00794]

25. 判断两个向量 @跟锦数学微信公众号

$$\beta_1=(4,3,-1,11),\quad \beta_2=(4,3,0,11)$$

是否为向量组 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1=(1,2,-1,5),\quad \alpha_2=(2,-1,1,1)$$

的线性组合, 若是, 请写出表达式. [数学考研竞赛00801]

26. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量空间的一组基, 求由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵. [数学考研竞赛00803]

27. 设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 $n\times n$ 矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成的线性空间, V_1 是反对称矩阵的全体. 证明: (1) V_1 是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的子空间; (2) 求 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的一个子空间 V_2 , 使 $\mathbb{P}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$. [数学考研竞赛00855]

28. 设 σ 是线性空间 V 上的可逆线性变换. (1)、证明: σ 的特征值一定不为零; (2)、证明: 如果 λ 是 σ 的特征值, 那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 σ^{-1} 的特征值. [数学考研竞赛00856]

29. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是实数域上线性空间 V 的一组基, V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1)=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-2\varepsilon_3,\quad \mathscr{A}(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+4\varepsilon_3,\quad \mathscr{A}(\varepsilon_3)=-2\varepsilon_1+4\varepsilon_2-\varepsilon_3.$$

(1)、写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A ; (2)、求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量; (3)、试问 $\mathscr{A}$ 是否对角化? 若能, 求 V 的一组基 η_1,η_2,η_3 , 使得 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为对角矩阵; (4)、求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式. [数学考研竞赛00858]

30. 设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上是 $n\times n$ 矩阵的全体关于矩阵的加法和数量乘法构成的数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 上的对称矩阵和反对称矩阵的全体, (1)、证明: V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的子空间; (2)、证明: $\mathbb{P}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$. [数学考研竞赛00863]

31. 设 ε_1 , ε_2 , ε_3 是实数域上线性空间 V 的一组基, V 上线性变换 σ 定义为: @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(\varepsilon_1)=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$
$$\sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$
$$\sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3.$$

(1)、写出 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A ; (2)、求出 σ 的特征值和特征向量; (3)、矩阵 A 是否与对角矩阵相似? 若是, 求出可逆矩阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 成对角形矩阵; (4)、求 A^n ; (5)、求出矩阵 A 的最小多项式. [数学考研竞赛00864]

32. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in V, W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4).$$

又由 $\beta_1,\beta_2\in W$, 且 β_1,β_2 线性无关. 证明: 可用 β_1,β_2 替换 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中的两个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$, 使得剩下的两个向量 $\alpha_{i_3},\alpha_{i_4}$ 与 β_1,β_2 仍然构成子空间 W , 即 @跟锦数学微信公众号

$$W=L(\beta_1,\beta_2,\alpha_{i_3},\alpha_{i_4}).$$

[数学考研竞赛00885]

33. 设 $\mathbb{P}$ 为数域, 令 @跟锦数学微信公众号

$$V_1=\left\{A\in\mathbb{P}^{n\times n}; A=A^{\mathrm{T}}\right\},$$
$$V_2=\left\{A\in\mathbb{P}^{n\times n}; B=-B^{\mathrm{T}}\right\},$$

其中 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 表示数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵的集合. 证明: $\mathbb{P}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$. [数学考研竞赛00886]

34. 设 $\mathbb{K}^{n\times n}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶方阵构成的线性空间, V_1 为 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶对称方阵构成的子空间, V_2 为 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶反对称方阵构成的子空间. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\mathbb{K}^{n\times n}=V_1\oplus V_2.$$

[数学考研竞赛00914]

35. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的幂零线性变换, 且 $\mathscr{A}^{n-1}\neq\mathscr{O}$, 则 $\mathscr{A}$ 的值域的维数 $\dim\mathscr{A}V=$ ____ . [数学考研竞赛00954]

36. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都是线性空间 V 的线性变换, 且 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$. 证明: $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ 当且仅当 $\mathscr{A}V$ 及 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 均为 $\mathscr{B}$ 的不变子空间. [数学考研竞赛00961]

37. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, V_1,V_2 是 V 的;两个子空间, 证明: $V=V_1\oplus V_2$ 当且仅当存在 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}, V_1=\mathscr{A}V, V_2=\mathscr{A}^{-1}(0).$$

[数学考研竞赛00962]

38. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $M_n(\mathbb{F})$ 是由所有 n 阶 $\mathbb{F}$ 矩阵在矩阵加法和数乘矩阵之下构成的 $\mathbb{F}$ 向量空间. 设 V 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个非零子空间, 且满足 V 中的任何非零矩阵都是可逆矩阵. (1) 举出一个这样的子空间 V 的例子从而说明这样的子空间确实存在. (2) 证明 V 的维数满足: $\dim V \leqslant n$. [数学考研竞赛00974]

39. 判断下列论断是否正确, 并证明你的结论: 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维实线性空间 V 上的两个线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$; 又已知 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都存在特征向量, 则 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 必有公共的特征向量. [数学考研竞赛00988]

40. 设 σ,τ 为线性变换, 且 σ 有 n 个不同的特征值. 证明: 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则 τ 可由 I , σ , σ^2 , $\cdots$, σ^{n-1} 线性表出, 其中 I 为恒等变换. [数学考研竞赛01075]

41. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 其正负惯性指数分别是 p,q . 再设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=x^TAx,\quad N_f=\{x\in\mathbb{R}^n;f(x)=0\}.$$

证明: (1) 包含于 N_f 的线性空间的维数至多是 $n-\max\{p,q\}$; (2) 若 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间, 将二次型限定在 W 中得到正负惯性指数分别是 p_1,q_1 , 则有 $p_1\leqslant p$, $q_1\leqslant q$. [数学考研竞赛01124]

42. 设 V 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的三维线性空间, $\mathscr{A}:V\to V$ 是一个线性变换. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in V$ $(\alpha_1\neq 0)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}\alpha_1=\alpha_2,\quad \mathscr{A}\alpha_2=\alpha_3,\quad \mathscr{A}\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2.$$

证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基. [数学考研竞赛01126]

43. 设 V 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式组成的向量空间. 对于 V 上的任意多项式 $f(x)$, 以 x^2-1 除 $f(x)$ 所得的商式及余式分别为 $q(x)$ 和 $r(x)$, 记 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=q(x)(x^2-1)+r(x).$$

设 $\mathscr{A}$ 是 V 到 V 的映射, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}(f(x))=r(x).$$

试证: $\mathscr{A}$ 是一个线性变换, 并求它关于基底 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ 的矩阵. [数学考研竞赛01146]

44. 设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换, $\mathscr{E}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价: (1)、 $\sigma=k\mathscr{E}, k\in\mathbb{C}$; (2)、存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1,\cdots,v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关. [数学考研竞赛01167]

45. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}$ 上所有 n 级矩阵构成的 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, f 是 V 上的线性变换, 证明: 若 f 保持矩阵的乘法运算, 即对任意 $A,B\in V$, @跟锦数学微信公众号

$$f(AB)=f(A)\cdot f(B).$$

则存在 n 级可逆矩阵 Q 使得对任意 $X\in V$, 有 $f(X)=Q^{-1}XQ$. [数学考研竞赛01170]

46. 设 V 为 n 维线性空间, J 为 n 阶矩阵, 满足 $J^n=2^nE$. 令 @跟锦数学微信公众号

$$W=\{x\in V;\ Jx=2x\},$$

证明: W 是 V 的线性子空间, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\dim W=\frac{\operatorname{tr} J}{2n}+\frac{\operatorname{tr} J^2}{2^2n}+\cdots+\frac{\operatorname{tr} J^n}{2^nn}.$$

[数学考研竞赛01200]

47. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维向量空间的一组基, 线性变换 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\1&-2&-2\\3&-6&-4\end{pmatrix}.$$

已知基 η_1,η_2,η_3 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

求 (1)、线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵; (2)、是否存在一组基使得线性变换在该基下的矩阵为对角阵? [数学考研竞赛01242]

欧氏空间

1. 对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n^2 维线性空间 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义 V 上的二元函数 @跟锦数学微信公众号

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\ (P,Q)\mapsto \operatorname{tr}(P^TQ),\quad \forall\ P,Q\in V.$$

并记 $|P|^2=\langle P,P\rangle$. 试证: (1) V 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为一个欧氏空间; (2) @跟锦数学微信公众号

$$\langle P,Q\rangle\leqslant\left|\frac{P+Q}{2}\right|^2,\quad \forall\ P,Q\in V.$$

[数学考研竞赛00092]

2. 设 V 是一个欧氏空间, $\alpha\in V$ 是一个非零向量. 对于 $\xi\in V$, 规定 @跟锦数学微信公众号

$$\tau(\xi)=\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示内积. 证明: (1) τ 是 V 的一个正交变换, 且 $\tau^2=\mathscr{E}$, 其中 $\mathscr{E}$ 是单位变换. [数学考研竞赛00651]

3. (2) 当 V 是一个 n 维欧氏空间时, 证明: 存在 V 的一个标准正交基, 使得 τ 关于这组基的矩阵有形状: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

[数学考研竞赛00652]

4. (3) 在 3 维欧氏空间里说明线性变换 τ 的几何意义. [数学考研竞赛00653]

5. 在二维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中定义内积如下: 对 $\forall\ X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\forall\ Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$(X,Y)=3x_1y_1+x_2y_2.$$

则向量 $\alpha=(1,1),\beta=(0,2)$ 的夹角余弦 $\cos\left\langle\widehat{\alpha,\beta}\right\rangle=$ ____ . [数学考研竞赛00718]

6. 设 $\mathscr{F}$ 是 n 维欧几里得空间 V 的对称变换. 证明: $\mathscr{F}$ 的像子空间 $\operatorname{im}\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 的核子空间 $\ker\mathscr{F}$ 的正交补. [数学考研竞赛00724]

7. 在 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $(1,1,1)$ 和 $(0,1,1)$ 正交的单位向量是 ____ . [数学考研竞赛00789]

8. 设 V 为全体 n $(n\geqslant 2)$ 阶实对称矩阵构成的实数域上的向量空间, 在 V 上定义二元函数 @跟锦数学微信公众号

$$(A,B)=\operatorname{tr}(AB),$$

其中 $\operatorname{tr}(AB)$ 表示矩阵 AB 的迹, E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1 , 其余元素均为零的 n 阶方阵. 证明: (1)、 V 关于 (A,B) 构成欧氏空间; (2)、记 @跟锦数学微信公众号

$$W=L(E_{11},E_{12}+E_{21}),$$

$W^{\perp}$ 为与 W 中任一元素都正交的 n 阶实对称矩阵的全体, 求 $W^{\perp}$ 的一组基和维数. [数学考研竞赛00887]

9. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义双线性函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}x_iy_j,$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

问: $f(x,y)$ 是否为 $\mathbb{R}^n$ 上的内积? 若是请证明; 若不是, 请说明理由. [数学考研竞赛00915]

10. 设二维欧氏空间的一组基为 α,β , 它的度量矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix},$$

η 在基下的坐标为 $(3,-4)$, 求此向量的长度 $|\eta|=$ ____ . [数学考研竞赛00953]

11. 定义 ψ 为 $[0,1]$ 到 n 阶方阵全体组成的欧氏空间的连续映射, 使得 $\psi(0)$ 为第一类正交阵, $\psi(1)$ 为第二类正交阵. 证明: 存在 $T_0\in(0,1)$, 使得 $\psi(T_0)$ 退化. [数学考研竞赛00992]

12. 设 $\boldsymbol{u}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^5$ 中的单位向量, 定义 $\boldsymbol{T_u(x) = x - 2\langle x, u\rangle u}$. 现设 $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ 是 $\mathbb{R}^5$ 中线性无关的两个单位向量, 问当 $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ 满足什么条件时, 存在正整数 $\boldsymbol{k}$ 使得 $\boldsymbol{(T_\alpha T_\beta)^k}$ 为单位映射. [数学考研竞赛01025]

第三章　其它数学课程

Contents

解析几何

1. 设点 $A(2,-1,1)$ ，直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_1:\begin{cases} x+2z+7=0\\ y-1=0\end{cases}$$

直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{k}=\frac{z}{-1}.$$

是判断是否存在过点 A 的直线 l ，使它与两条已知直线 l_1,l_2 都相交？如果存在，请求出此直线的方程；如果不存在，请说明理由. [数学考研竞赛00169]

2. 求经过三平行直线 @跟锦数学微信公众号

$$L_1:x=y=z,L_2:x-1=y=z+1,L_3:x=y+1=z-1$$

的圆柱面的方程. [数学考研竞赛00174]

3. 设 $(a\times b)\cdot c=6$ ，则 @跟锦数学微信公众号

$$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(a+c)=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00195]

4. 已知两直线的方程 @跟锦数学微信公众号

$$L: x=y=z, L': \frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}.$$

(1)、问: 参数 a, b 满足什么条件时, L 与 L' 是异面直线? (2)、当 L 与 L' 不重合时, 求 L' 绕 L 旋转所生成的旋转面 π 的方程, 并指出曲面 π 的类型. [数学考研竞赛00200]

5. 已知二次曲面 Σ (非退化) 过以下九点: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}&A(1,0,0), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,0,0),\\&E(3,1,2), F(3,-2,-4), G(0,1,4), H(3,-1,-2), I(5,2\sqrt{2},8).\end{aligned}$$

问 Σ 是哪一类曲面? [数学考研竞赛00219]

6. 求直线 $l_1: \begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_2: \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

的距离. [数学考研竞赛00227]

7. 求出过原点且和椭球面 $4x^2+5y^2+6z^2=1$ 的交线为一个圆周的所有平面. [数学考研竞赛00233]

8. 已知四点 @跟锦数学微信公众号

$$A(1,2,7), B(4,3,3), C(5,-1,6), D(\sqrt{7},\sqrt{7},0).$$

试求过这四个点的球面方程. [数学考研竞赛00248]

9. 设有空间中五点: @跟锦数学微信公众号

$$A(1,0,1), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,1,0), E(3,1,2).$$

试求过点 E 且与 A, B, C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程. [数学考研竞赛00264]

10. 设 Γ 为椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.[数学考研竞赛00281]

11. 设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 共 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.[数学考研竞赛00282]

12. 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2 , 使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$; [数学考研竞赛00289]

13. 设 A 为正常数, 直线 L 与双曲线 $x^2-y^2=2\ (x>0)$ 所围成的有限部分的面积为 A . 证明: (1)、上述 L 被双曲线 $x^2-y^2=2\ (x>0)$ 所截线段的中点的轨迹为双曲线; (2)、 L 总是 (1) 中轨迹曲线的切线.[数学考研竞赛00299]

14. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点, 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周 (无滑动) 滚动一周, 这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以 P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R , 记 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma:\ \mathbb{R}^2\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$$

为圆 C 的反演变换, 它将 $Q\in\mathbb{R}^2\setminus\{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q' , 且满足 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ'}=R^2$. 求证: $\gamma(\Gamma)$ 为抛物线. [数学考研竞赛00315]

15. 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. $P(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上. [数学考研竞赛00331]

16. 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. $P(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上. [数学考研竞赛00337]

17. 已知空间的两条直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_1:\ \frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1};\quad l_2:\ \frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}.$$

(1)、证明 l_1 和 l_2 异面; (2)、求 l_1 和 l_2 的公垂线的标准方程; (3)、求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程. [数学考研竞赛00358]

18. 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p , 一族球面中的每个球面都过点 P , 且截直线 l 得到的弦长都是定值, a . 求该球面族的球心的轨迹. [数学考研竞赛00378]

19. 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p , 一族球面中的每个球面都过点 P , 且截直线 l 得到的弦长都是定值, a . 求该球面族的球心的轨迹. [数学考研竞赛00387]

20. 设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 v 为直线方向; 直线 L_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 w 为直线方向. (1)、证明: 存在唯一点 $P\in L_1$ 和 $Q\in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2 . (2)、求 P 点和 Q 点坐标 (用 a,b,v,w 表示). [数学考研竞赛00408]

21. 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程. [数学考研竞赛00419]

22. 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量. [数学考研竞赛00428]

23. 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量. [数学考研竞赛00437]

24. 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光线照射 S , 其中的部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ . 证明: Γ 落在一张过椭圆中心的平面上. [数学考研竞赛00456]

25. 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C . 问: C 为何种类型的曲线? 证明你的结论. [数学考研竞赛00476]

26. 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C . 问: C 为何种类型的曲线? 证明你的结论. [数学考研竞赛00485]

27. 过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为 ____ . [数学考研竞赛00494]

28. 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C . 求该平面 P 的法线与 z - 轴的夹角. [数学考研竞赛00504]

29. 在空间直角坐标系下, 设有椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a, b, c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ . 证明: 存在平面 Π , 使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$; 同时求出平面 Π 的方程. [数学考研竞赛00524]

30. 在空间直角坐标系下, 设有椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a, b, c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ . 证明: 存在平面 Π , 使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$; 同时求出平面 Π 的方程. [数学考研竞赛00533]

31. 设平面过原点和点 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 则此平面方程为 ____ . [数学考研竞赛00543]

32. 在空间直角坐标系下, 设马鞍面 S 的方程为 $x^2-y^2=2z$. 设 σ 为平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, 其中 α, β, γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使通过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ . [数学考研竞赛00553]

33. 给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别于 l_1, l_2 共面, 且与平面 $z=0$ 平行. (1)、求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程; (2)、确定 S 是什么曲面. [数学考研竞赛00573]

34. 给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别于 l_1, l_2 共面, 且与平面 $z=0$ 平行. (1)、求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程; (2)、确定 S 是什么曲面. [数学考研竞赛00582]

35. 空间中有两个圆球面 B_1 和 B_2 , B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D . 设 B 是含在 D 中的一个圆球, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问: (1)、 (4 分) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面; (2)、 (2 分) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点. 证明你的论断. [数学考研竞赛00602]

36. 设 L_1 和 L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线, 点 B 是它们公垂线段的中点. 点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动, 使得 $A_1B\perp A_2B$. 证明直线 A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面. [数学考研竞赛00608]

37. 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点. @跟锦数学微信公众号

$$A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$$

为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1,B_1 与 C_1 . (1)、求连接 N 与 A 两点的直线方程. (2)、求点 A_1,B_1 与 C_1 的坐标. (3)、给定点 @跟锦数学微信公众号

$$A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0),$$

求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积. [数学考研竞赛01158]

38. 已知椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>b$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon=1$ 或 -1 平行于已知直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_\varepsilon: \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的的每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面. [数学考研竞赛01164]

常微分方程

1. 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y_1&=xe^x+e^{2x},\\ y_2&=xe^x+e^{-x},\\ y_3&=xe^x+e^{2x}-e^{-x}\end{aligned}$$

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程. [数学考研竞赛00188]

2. 求方程 @跟锦数学微信公众号

$$(2x+y-4)\,dx+(x+y-1)\,dy=0$$

的通解. [数学考研竞赛00242]

3. 设 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times\mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$y'=f(x,y),\quad z'\leqslant f(x,z),\quad x\in[a,b].$$

已知 $z(a)\leqslant y(a)$. 求证: $z(x)\leqslant y(x)$, $x\in[a,b]$. [数学考研竞赛00341]

4. 已知 $y_1=e^x$ 和 $y_2=xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是 ____ . [数学考研竞赛00364]

5. 设实数 $a\neq 0$, 微分方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y''(x)-a[y'(x)]^2=0 \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$$

的解是 ____ . [数学考研竞赛00398]

6. 微分方程 $y''-(y')^3=0$ 的通解是 ____ . [数学考研竞赛00446]

7. 求证: 常微分方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$$

有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解. [数学考研竞赛00480]

8. 有界连续函数 $g(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $1<g(t)<2$, $x(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 是方程 $x''(t)=g(t)x$ 的单调正解. 求证: 存在常数 $C_2>C_1>0$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$C_1x(t)<|x'(t)|<C_2x(t), t\in\mathbb{R}.$$

[数学考研竞赛00528]

9. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}f(x,y)=ye^y\,\mathrm{d}x+x(1+y)e^y\,\mathrm{d}y,$$

及 $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$ ____ . [数学考研竞赛00544]

10. 满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 @跟锦数学微信公众号

$$u(t)=\underline{\qquad}.$$

[数学考研竞赛00545]

11. 已知 $a(x),b(x),c(x)\in C(\mathbb{R})$, 方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$$

只有有限个 2π 周期解. 求它的 2π 周期解个数的最大值. [数学考研竞赛00577]

12. 当 a 取何值时, 边值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y''(x)+ay(x)=1 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

没有解. [数学考研竞赛01057]

13. 设 $f(x)$ 是 $(a,+\infty)$ 上的连续函数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L,$$

$x_0>a$ 是一常数, k 是一正常数. 求初值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y'+ky=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解, 并计算该解当 $x\to+\infty$ 时的极限. [数学考研竞赛01058]

实变函数

1. 证明: 若 f 在可测集 E 上是可测函数, 则 $|f|$ 也是 E 上的可测函数. 但反之不成立.[数学考研竞赛00078]

2. 设 E_k 是一列可测集, $f\in\mathcal{L}(\cup_{k=1}^\infty E_k)$. (1)、令 $A=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_k$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\cup_{k=n}^\infty E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2)、令 $A=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_k$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\cap_{k=n}^\infty E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3)、如果 $\{E_k\}$ 是单调的, 求证: $\lim\limits_{k\to\infty} E_k=E$ 存在, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[数学考研竞赛00343]

3. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为 K , 则对任意的可测集 $E\subset\mathbb{R}^1$, 均有 @跟锦数学微信公众号

$$m[f(E)]\leqslant K\cdot m(E).$$

[数学考研竞赛00392]

4. 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, E 是 L -可测的. 若 $mE > a > 0$, 则存在无内点的有界闭集 $F \subset E$, 使得 $m(F) = a$. [数学考研竞赛00441]

5. (1)、设 E 是三分 Cantor 集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数. (2)、设 $E \subset [0,1]$, 证明: $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差的重要条件是 E 的边界点集是有限集. [数学考研竞赛00489]

6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $m(E) < \infty$. 设 $f, f_k \in L^2(E)$, 在 E 上几乎处处有 $f_k \to f$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_E |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0.$$

[数学考研竞赛00537]

7. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测, 则 @跟锦数学微信公众号

$$G = \{(x, f(x)) ; x \in \mathbb{R}\}$$

是 2 -维 Lebesgue 零测集. [数学考研竞赛00586]

8. 试建立 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 之间的一一对应. [数学考研竞赛01024]

9. 单调函数的不连续点集是可数集. [数学考研竞赛01046]

10. 设 $f \in L(\mathbb{R})$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛到一 Lebesgue 函数. [数学考研竞赛01143]

11. 对于有界区间 $[a,b]$ 的划分 @跟锦数学微信公众号

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b,$$

其范数定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\|P\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} (x_{k+1} - x_k).$$

现设 $[a,b]$ 上的函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M>0$ 使得对任何 $x,y\in[a,b]$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$s(f;P)=\sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}.$$

若 $\lim\limits_{\|P\|\to0^+}s(f;P)$ 存在, 则称曲线 $y=f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明: (1)、 $\lim\limits_{n\to\infty}s(f;P_n)$ 存在. (2)、曲线 $y=f(x)$ 可求长. [数学考研竞赛01163]

12. 设 $A=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n;n=1,2,\cdots\right\}$, $B=\left\{0,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}+1;n=1,2,\cdots\right\}$, 求 $\mathrm{int}A$, A' , $\bar{A}$, $\mathrm{int}B$, B' , $\bar{B}$. [数学考研竞赛01214]

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\mathrm{e}^{-x}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 Riemann 可积? 是否 Lebesgue 可积? (须说明理由), 若可积, 求出积分值. [数学考研竞赛01215]

14. 设 (X,ρ) 是距离空间, 证明: 当 $0<\alpha<1$ 时, $d(x,y)=[\rho(x,y)]^\alpha$, $x,y\in X$, 也是 X 上的距离. [数学考研竞赛01216]

15. 证明 $\mathbb{R}$ 中的所有可测子集族 $\mathscr{M}$ 的基数为 $2^{\aleph}$, 其中 $\aleph$ 为连续基数. [数学考研竞赛01233]

16. 计算下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{[0,\infty)}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$. [数学考研竞赛01234]

泛函分析

1. 内积空间是严格凸空间. [数学考研竞赛00964]

2. 在度量空间 (X,ρ) 中, 开球 $B(x,r)=\{y\in X;\rho(y,x)<r\}$ 的闭包一定是 $\{y\in X;\rho(y,x)\leqslant r\}$ 么? 如果是, 请给出证明; 如果不是, 请举出反例. [数学考研竞赛01026]

3. 设 (X,ρ) 是度量空间, A 是 X 的非空子集, 考虑 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\operatorname{dist}(x,A)\overset{\text{def}}{=}\inf_{y\in A}\rho(x,y),\quad x\in X.$$

试证: f 是 X 上的一致连续函数. [数学考研竞赛01029]

4. 在 [Yosida, Kō saku. Functional analysis. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995] 第 126-127 页给出了一致凸 Banach 空间的定义: 若 Banach 空间 X 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \text{s.t.}$$
$$\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\Rightarrow\|x+y\|\leqslant 2(1-\delta).$$

则称 X 是一致凸的 Banach 空间. 试证: 若 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1,\quad\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon'>0,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n+y_n\|<2.$$

[数学考研竞赛01125]

5. 讨论 $x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & t\in[0,1/n)\\ 0, & t\in[1/n,1]\end{cases}$ ($n=1,2,\cdots$) 是否为 $C[0,1]$ 中的 Cauchy 列? 是否为 $L^1[0,1]$ 中的 Cauchy 列? [数学考研竞赛01217]

6. 设 $Ax=\left(\xi_1,\dfrac{1}{2}\xi_2,\dfrac{1}{3}\xi_3,\cdots\right),\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in\ell^\infty$, ℓ^∞ 为有界数列空间, 证明算子 A 是 ℓ^∞ 到 ℓ^∞ 的有界线性算子, 并求 $\|A\|$. [数学考研竞赛01218]

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是一列内积空间, 令 @跟锦数学微信公众号

$$X=\left\{\{x_n\};x_n\in X_n,\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\},$$

当 $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ 时, 规定 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\},$$

α,β 是数, @跟锦数学微信公众号

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n,y_n\rangle.$$

证明 X 是内积空间. [数学考研竞赛01220]

8. 设 $K(x,t)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant t \\ t, & t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 映射 $T: C[0,1]\to C[0,1]$, 对 $\phi(t)\in C[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\phi(x)=k_0+\alpha\int_0^1 K(x,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t,$$

k_0 和 α 是常数, 当 k_0 和 α 是何值时, T 是压缩映射. [数学考研竞赛01221]

9. H 为内积空间, $M,N\subset H$, L 是由 M 和 N 张成的线性空间, 证明 $L^{\perp}=M^{\perp}\cap N^{\perp}$. [数学考研竞赛01223]

微分几何

1. 设 Γ 是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线, l 是 Γ 的准线. 将 Γ 绕其准线 l 旋转一周, 得到旋转面 S . 求 S 的两个主曲率的比值. [数学考研竞赛00344]

2. 设三维空间的曲面 S 满足: (1)、 $P_0=(0,0,-1)\in S$; (2)、对任意 $P\in S$, $|\overrightarrow{OP}|\leqslant 1$, 其中 O 是原点. 证明: 曲面 S 在 P_0 的 Gauss 曲率 $K(P_0)\geqslant 1$. [数学考研竞赛00393]

3. 设 $\gamma(s)$, $s\in[0,l]$ 是空间中一条光滑闭曲线, 以弧长为参数, 且曲率为 $k>0$. 设 $\beta:[0,l]\to S^2$ 为单位球面上由 $\gamma(s)$ 的单位主法向量构成一条简单闭曲线 B . 证明: B 将球面分成面积相等的两个部分. [数学考研竞赛00442]

4. 设 S 为三维欧氏空间中的一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上. 证明: S 是平面的一部分. [数学考研竞赛00490]

5. 已知椭圆柱面 S : @跟锦数学微信公众号

$$r(u,v)=\{a\cos u,b\sin u,v\},-\pi\leqslant u\leqslant\pi,-\infty<v<+\infty.$$

(1)、求 S 上任意测地线的方程; (2)、设 $a=b$. 取 @跟锦数学微信公众号

$$P=(a,0,0),Q=(a\cos u_0,b\sin u_0,v_0)\ \ (-\pi<u_0<\pi,-\infty<v_0<+\infty).$$

写出 S 上连接 P,Q 两点的最短曲线的方程. [数学考研竞赛00538]

6. 在空间直角坐标系中设椭圆抛物面 S 的方程为 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma(u,v)=\left(u,v,u^2+\frac{1}{2}v^2\right),\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

(1)、求 S 的所有脐点; (2)、设 σ 为与脐点处切平面平行的平面, 它截 S 于曲线 C , 证明 C 是一个圆周. [数学考研竞赛00587]

概率统计

1. 一只盒子中装有标上 1 至 N 的 N 张票券. 由放回地一张一张地抽取. 若我们想收集 r 张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的. [数学考研竞赛00345]

2. 设在国际市场上有我国某种出口商品每年的需求量 X (单位: 吨) 是随机变量, X 服从 $[100, 200]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一顿, 可以为国家挣得外汇 3 万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求: 应组织多少货源, 才能使国家的收益最大? [数学考研竞赛00396]

3. 甲袋中有 $N-1$ $(N>1)$ 个白球和 1 个黑球, 乙袋中有 N 个白球, 每次从甲、乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中. 这样经过了 n 次, 求黑球出现在甲袋中的概率 p_n , 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$. [数学考研竞赛00445]

4. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机本变量序列, 且 @跟锦数学微信公众号
$$P(X_n=0)=P(X_n=a)=\frac{1}{2},$$
其中常数 $a>0$. 记 @跟锦数学微信公众号
$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}.$$
求 Y_n 的特征函数, 并证明其分布收敛于区间 $[0, a]$ 上的均匀分布. [数学考研竞赛00493]

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量, 其有共同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$. 现对随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_nj$ 按大小顺序重新排列为 $X_{n_1}\leqslant X_{n2}\leqslant\cdots\leqslant X_{nn}$. (1)、求随机变量 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合概率密度函数 $f_{1n}(x, y)$; (2)、如果 X_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 求随机变量 $U=X_{nn}+X_{n1}$ 的密度函数 $f_U(u)$. [数学考研竞赛00541]

6. 设独立随机变量序列 $\{X_n; n\geqslant 1\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号
$$P\left(X_n=\pm n^{\theta}\right)=\frac{1}{2},$$
其中 $\theta>0$ 是常数. 记 @跟锦数学微信公众号
$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

(1)、当 $\theta<\dfrac{1}{2}$ 时, 证明 $\dfrac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0 , 即对任意 $\varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n}\geqslant\varepsilon\right)=0;$$

(2)、证明 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}}\xrightarrow{D} N(0,1),$$

其中 $\operatorname{Var}(S_n)$ 表示 S_n 的方差, $\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛. [数学考研竞赛00590]

抽象代数

1. 设 M 为自然数集, 试给出 M 的两个双射变换 σ,τ 使得 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$. [数学考研竞赛00071]

2. 设群 $G=AB$, 其中 A,B 均为 G 的 Abel 群, 且 $AB=BA,\forall\ g_1,g_2\in G$, 用 $[g_1,g_2]$ 表示换位子, 即 @跟锦数学微信公众号

$$[g_1,g_2]=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1},$$

G' 表示 G 的换位子群 (即由 G 的换位子所生成的子群). 证明: (1)、 $\forall\ a,x\in A,\forall\ b,y\in B$ 有下式成立: @跟锦数学微信公众号

$$\left[x^{-1},y^{-1}\right][a,b]\left[x^{-1},y^{-1}\right]^{-1}=[a,b].$$

(2)、 G' 为 Abel 群. [数学考研竞赛00346]

3. 设 R 是 $[0,1]$ 上连续函数环, 其加法和普通的函数加法, 乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的极大左理想. 证明: $\forall\ f,g\in I$, f 与 g 在 $[0,1]$ 上必有公共的零点. [数学考研竞赛00395]

4. 设 u_1,u_2,v_1,v_2 为群 G 中的元素, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$u_1v_1=v_1u_1=u_2v_2=v_2u_2.$$

若 u_1,u_2 的阶均为 8 , v_1,v_2 的阶均为 13 . 证明: u_1u_2 的阶为 4 及 v_1v_2 的阶为 13 . [数学考研竞赛00440]

5. 设 $(F,+,\cdot)$ 是特征为 p ($p\neq 0$) 的域, 1 和 0 分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F,+)$ 到其乘法半群 $(\mathbb{F},\cdot)$ 的同态, 即 $\forall\ x,y\in F$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y).$$

证明: φ 要么将 F 的所有元映照为 0 , 要么将 F 的所有元映照为 1 . [数学考研竞赛00488]

6. 设 G 为群, 且满足: @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in G,(xy)^2=(yx)^2.$$

证明: $\forall\ x,y\in G$, 元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过 2 . [数学考研竞赛00536]

7. 设 $(R,+,\cdot)$ 为含 $1\neq 0$ 的结合环, $a,b\in R$. 若 $a+b=ba$, 且关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x^2-(ax^2+x^2a)+ax^2a=1,\\ x+a-(ax+xa)+axa=1 \end{cases}$$

在 R 中有解. 证明: $ab=ba$. [数学考研竞赛00585]

数值分析

1. 给定多项式序列 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} &T_0(x)=1,T_1(x)=x,\\ &T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),n=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

求证: (1)、当 $x\in[-1,1]$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$T_n(x)=\cos\left(n\arccos x\right).$$

(2)、设 $C[-1,1]$ 是区间 $[-1,1]$ 上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\langle f,g\rangle:=\int_{-1}^1\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

则 $T_n(x)$ 是该内积空间的正交多项式, 即当 $n\neq m$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\langle T_n(x),T_m(x)\rangle=0.$$

(3)、设 $P(x)$ 是次数为 n 的首项系数为 1 的多项式. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\|P(x)\|_\infty \geqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

且等号成立当且仅当 @跟锦数学微信公众号

$$P(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x),$$

这里 $\|P(x)\|_\infty=\max\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)|$. [数学考研竞赛00347]

2. 考虑求解线性方程组 $Ax=b$ 的如下迭代格式 @跟锦数学微信公众号

$$(\alpha D-C)x^{(k+1)}=[(\alpha-1)D+C^{\mathrm{T}}]x^{(k)}+b,$$

其中 D 为实对称正定矩阵, C 是满足 $C+C^{\mathrm{T}}=D-A$ 的实方阵, α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵, 且 $\alpha D-C$ 可逆, $\alpha>1/2$, 证明: 上述迭代格式对任何初始向量 $x^{(0)}$ 收敛. [数学考研竞赛00394]

3. 实系数多项式 $p(x)$ 的模 1 范数定义为: @跟锦数学微信公众号

$$\|p\|_1=\int_0^1|p(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(1)、求二次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)\leqslant x^3$ 对任意 $x\in[0,1]$ 成立, 且 $\left\|x^3-p(x)\right\|_1$ 达到最小; (2)、求三次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)\leqslant x^4$ 对任意 $x\in[0,1]$ 成立, 且 $\left\|x^4-p(x)\right\|_1$ 达到最小. [数学考研竞赛00443]

4. 考虑求解一阶常微分方程初值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

的 Runger-Kutta 法. [数学考研竞赛00491]

5. 推导求解线性方程组的共轭梯度法的计算格式, 并证明该格式经有限步迭代后收敛. [数学考研竞赛00539]

6. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

是区间 $[a,b]$ 的一个剖分. 用 $S[a,b]$ 表说满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合: 对任意 $s(x)\in S[a,b]$, (1)、 $s(x)|_{[x_i,x_{i+1}]}$ 是三次多项式, $i=$

$0,1,\cdots,n-1$. (2)、 $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导. 证明: (1)、对区间 $[a,b]$ 上的任意实函数 $f(x)$, 存在唯一的 $s(x)\in S[a,b]$ 满足: @跟锦数学微信公众号

$$s(x_i)=f(x_i),i=0,1,\cdots,n,s''(a)=s''(b)=0.$$

(2)、设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 则对满足 (1) 的函数 $s(x)$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b|s''(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

且等号成立当且仅当 $s(x)=f(x)$. [数学考研竞赛00588]

点集拓扑

1. 试举一个不满足 A_1 公理 (A_2 公理) 的拓扑空间. [数学考研竞赛00042]

2. 试举一个拓扑空间 X, 其有一子集 Y, 是有界闭的, 但不是紧致的. [数学考研竞赛00043]

3. 平面上的两个互不相交的闭集的距离一定大于零么? [数学考研竞赛00044]

忠道定理 拓扑空间中每个子集的导集都是闭集当且仅当每个单点集的导集是闭集. [数学考研竞赛01045]

4. 证明: 任何一个有限补空间和任何一个可数补空间都是局部连通空间. [数学考研竞赛01047]

5. 设 $A\subset\mathbb{R}$, 试证: A 是连通的 $\Leftrightarrow$ A 是道路连通的. [数学考研竞赛01048]

6. 设 X 是一个满足第一可数性公理的空间, $A\subset X$. 证明 A 是一个开子集当且仅当对于 X 中的任何一个序列 $\{x_i\}$, 只要 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x\in A$, 则存在 $N>0$ 使得当 $i\geqslant N$ 时有 $x_i\in A$. [数学考研竞赛01049]

7. 设 R 是集合 X 上的等价关系; $p:X\to X/R$ 是自然映射; 对 $i=1,2$, $p_i:X\times X\to X$ 是第 i 个投射, 也即 @跟锦数学微信公众号

$$p_1(x,y)=x,\quad p_2(x,y)=y,\ \forall\ (x,y)\in X\times X.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$p^{-1}[p(A)]=p_2[p_1^{-1}(A)\cap R],\ \forall\ A\subset X.$$

[数学考研竞赛01056]

8. 设 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{d,e,f,g\}$, $R=\{(a,d),(a,e),(b,f)\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{d,e,g\}$. 试求 $R(A)$, $R^{-1}(B)$, R 的值域与定义域. [数学考研竞赛01059]

9. 实数集合 $\mathbb{R}$ 中第一个关系 R 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x-y\in\mathbb{Z}\right\}.$$

证明 R 是一个等价关系. [数学考研竞赛01060]

10. 设 X,Y 是两个集合, $f:X\to Y$. 试证: (1) 对于任意 $A\subset X$, @跟锦数学微信公众号

$$A\subset f^{-1}(f(A));$$

(2) 对于任意 $B\subset Y$, @跟锦数学微信公众号

$$B\supset f\left(f^{-1}(B)\right),$$

(3) f 是一个满射当且仅当 @跟锦数学微信公众号

$$B=f(f^{-1}(B))$$

对于任何 $B\subset Y$ 成立. [数学考研竞赛01061]

11. 设 A 是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 它包含着某个非退化的开区间, 即存在 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 使得 $A\supset(a,b)$. 证明 $\mathrm{card}\,A=\aleph$. [数学考研竞赛01062]

12. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}\,(A)=k$, 证明: (1) 若 $A=A_1+A_2+\cdots+A_l$, 且 $\mathrm{r}\,(A_i)=1,i=1,2,\cdots,l$, 则 $l\geqslant k$; (2) 存在秩为 1 的矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 使得 $A=A_1+A_2+\cdots+A_k$. [数学考研竞赛01063]

13. 设 $\sigma,\sigma':\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $\sigma(x,y)=(x-y)^2$ 和 $\sigma'(x,y)=|x^2-y^2|$. 证明 σ 和 σ' 都不是 $\mathbb{R}$ 的度量. [数学考研竞赛01064]

14.

15. 试证: (1) 从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射; (2) 从离散空间到拓扑空间的任何映射都是连续映射. [数学考研竞赛01065]

16. 求集合的导集和闭包: (1) 设 A 是有限补空间 X 中的一个无限子集, 求 A 的导集和闭包; (2) 设 A 是可数补空间 X 中的一个不可数子集, 求 A 的导集和闭包; (3) 求实数空间 $\mathbb{R}$ 中的有理数集 $\mathbb{Q}$ 的导集和闭包; (4) 设 X^* 是 §2.2 习题 9 中定义的拓扑空间, 求单点集 $\{\infty\}$ 的导集和闭包. [数学考研竞赛01066]

17. 设 X 是一个拓扑空间, $A, B \subset X$. 证明: (1) $A^{-}=A \cup \partial A$, $A^{o}=A \setminus \partial A$; (2) $\partial(A^{o}) \subset \partial A$, $\partial(A^{-}) \subset \partial A$; (3) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $(A \cup B)^{o} \supset A^{o} \cup B^{o}$; (4) $\partial A=\varnothing$ 当且仅当 A 是一个既开又闭的集合; (5) $\partial(\partial A) \subset \partial A$; (6) $A \cap B \cap \partial(A \cap B)=A \cap B \cap(\partial A \cup \partial B)$. [数学考研竞赛01067]

18. 设 X 是一个度量空间. 证明: 如果 X 有一个基只含有有限个元素, 则 X 必为含有有限多个点的离散空间. [数学考研竞赛01068]

19. 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开 (闭) 子集, 则 Y 作为 X 的子空间时特别地被称为 X 的开 (闭) 子空间. 证明: (1) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开子空间, 则 $A \subset Y$ 是 Y 中的一个开集当且仅当 A 是 X 的一个开集; (2) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个闭子空间, 则 $A \subset Y$ 是 Y 中的一个闭集当且仅当 A 是 X 的一个闭集. [数学考研竞赛01069]

20. 设 (X, ρ) 是一个度量空间, 证明映射 $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续映射. [数学考研竞赛01070]

21. 设 X, Y 是两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是商映射. 令 @跟锦数学微信公众号

$$R=\left\{(x, y) \in X^{2} ; f(x)=f(y)\right\} .$$

试证: (1) R 是 X 中的一个等价关系; (2) Y 同胚于商空间 X / R . [数学考研竞赛01079]

22. 设 A 和 B 是拓扑空间 X 的隔离子集, 证明: 如果 $A_{1} \subset A$, $B_{1} \subset B$, 则 A_{1} 和 B_{1} 也是隔离子集. [数学考研竞赛01080]

23. 设 X 是一个拓扑空间, $x, y \in X$ 是连通的. 证明: 如果 E 是一个既开又闭的子集, 则或者 $x, y \in E$ 或者 $x, y \notin E$. (此命题的逆命题不成立, 见下题.) [数学考研竞赛01081]

24. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射. 证明: 如果 X 是一个可分空间, 则 $f(X)$ 也是可分的. (这说明可分性是一个连续映射所保持的性质, 并且由此可见, 它是一个拓扑不变性质, 可商性质.) [数学考研竞赛01088]

25. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射. 证明: 如果 X 是一个 Lindelöff 空间, 则 $f(X)$ 也是一个 Lindelöff 空间. [数学考研竞赛01089]

26. 设 X 是一个拓扑空间, 证明: X 是 T_{0} 空间当且仅当对于任何 $x, y \in X$, $x \neq y$, 或者 $\{x\} \cap \overline{\{y\}}=\varnothing$ 或者 $\{y\} \cap \overline{\{x\}}=\varnothing$. [数学考研竞赛01090]

27. 设 X 是一个拓扑空间, 证明: X 是 T_1 空间当且仅当对于任何 $x \in X$, 点 x 的所有邻域的交恰是单点集 $\{x\}$. [数学考研竞赛01091]

28. 设 U 是拓扑空间 X 中的一个开集. 证明: 如果 X 中的一个由紧致闭集构成的集族 $\mathscr{B}$ 满足条件 $\bigcap_{B \in \mathscr{B}} B \subset U$, 则存在 $\mathscr{B}$ 的一个有限子族 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U.$$

[数学考研竞赛01092]

29. 设 X 是一个 Hausdorff 空间, $\mathscr{A}$ 是它的一个非空集族, 且由 X 的紧致子集构成. 证明: $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$ 是 X 的一个紧致子集. [数学考研竞赛01093]

30. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, 其中 a 为常数. 如果 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 . 试证: $x_1 x_2 > \mathrm{e}^2$. [数学考研竞赛01100]

31. 在实数空间 $\mathbb{R}$ 中给定如下等价关系: @跟锦数学微信公众号

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in (-\infty, 1) \text{ 或者 } x, y \in [1, 2) \text{ 或者 } x, y \in [2, +\infty).$$

设在这个等价关系下得到的商集 $Y = \{[-2], [1], [2]\}$, 试写出 Y 的商拓扑. [数学考研竞赛01137]

复变函数

1. 设 f 在 $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1\}$ 上除点 $z_0 \in D$ 外处处解析, 且满足 (1) 在 D 内 f 没有零点; (2) $z \in \partial D \Rightarrow f(z) \in \partial D$; (3) z_0 是 f 的一阶极点. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ \theta \in \mathbb{R},\ \text{s.t. } f(z) = \mathrm{e}^{i\theta} \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0}.$$

[数学考研竞赛00065]

2. 设 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 是单位圆盘. 非常值函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析, 且当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$. 求证: $f(D) = D$. [数学考研竞赛00342]

3. 设 a, b 是两个不同的复数, 求满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$[f'(z)]^2 = [f(z) - a] \cdot [f(z) - b]$$

的非零整函数 $f(z)$. [数学考研竞赛00391]

4. 设 $D=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant 1\}$ 是单位圆盘, $f(z)$ 在 D 上解析, $f(0)=0$, 且在 D 上有 $\mathrm{Re}\, f(z)\leqslant 1$. 求证: 在 D 上有 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{Re}\, f(z)\leqslant \frac{2|z|}{1+|z|}.$$

[数学考研竞赛00444]

5. 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 并且 $|f(z)|\leqslant M$ $(M>0)$, M 为常数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(0)|\leqslant M-\frac{|f(0)|^2}{M}.$$

[数学考研竞赛00492]

6. 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 在其边界上连续. 若在 $|z|=1$ 上 $|f(z)|=1$. 证明 $f(z)$ 为有理函数. [数学考研竞赛00540]

7. 设 z_0 是复函数 $w=f(z)$ 的 n 阶极点. 试证明: 一定存在 $\rho>0$ 及 $R>0$, 使得对任意 @跟锦数学微信公众号

$$w\in\{w\in\mathbb{C};|w|>R\},$$

函数 $f(z)-w$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 中必有 n 个零点. [数学考研竞赛00589]

科研

1. 设 $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 适合 @跟锦数学微信公众号

$$rf\in L^1(\mathbb{R}^3),\ \frac{f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),\ \frac{f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 试证: 对 $1\leqslant p\leqslant 2$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant \|rf\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{1-\frac{1}{p}}.$$

[数学考研竞赛00058]

2. 设 $f(x,y,z)=f(r,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$ 适合 $\lim\limits_{r^2+z^2\to\infty}f(r,z)=0$, @跟锦数学微信公众号

$$r\nabla f\in L^1(\mathbb{R}^3),\quad \frac{\nabla f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),\quad \frac{\nabla f}{r}\in L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant \sqrt{2}\,\|r\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac14} \left\|\frac{\nabla f}{r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac14} \left\|\frac{\nabla f}{r}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\frac12}.$$

[数学考研竞赛00059]

3. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 适合 $f\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 再设 $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 适合 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ C>0,\ \exists\ x_0\in\mathbb{R}^2,\ \text{s.t.}\ |K(x)|\leqslant\frac{C}{|x-x_0|},\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^2.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} K(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\sqrt{2\pi}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac12}\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac12}.$$

[数学考研竞赛00061]

4. A strong solution (by which we mean @跟锦数学微信公众号

$$u\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$$

) is in fact smooth. This is a classical result, and can be located in many references. Here, we refer to Page 870–871 of the following paper: Chen, Qionglei; Miao, Changxing; Zhang, Zhifei. The Beale-Kato-Majda criterion for the 3D magneto-hydrodynamics equations. Comm. Math. Phys. 275 (2007), no. 3, 861–872. [数学考研竞赛00081]

5. 这段时间一直在看 [Gallay Thierry, Vladimir Sverak, Remarks on the Cauchy problem for the axisymmetric Navier-Stokes equations, arXiv preprint arXiv:1510.01036 (2015)]. 一两个礼拜了. 那个 Proposition 2.4 终于验算完毕 (也确实得到了作者给出的条件, 不过确实过程复杂, 写出来也乱). 总结下教训: 开始没注意到 (28) 最前面有个系数 $r^\alpha/\bar{r}^\beta$; 后来又没注意到不同 cases 时在 "$\xi^\beta F'(\xi)$ 有界" 所选取的 β 不同; 最后在不同 cases 时, 如何估计又失算了, 少算了一两个可能情形. 如此耗费时间...问作者又没丝毫回应. 不过现在也好了. [数学考研竞赛00083]

6. @跟锦数学微信公众号

$$\|\nabla f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\Lambda^\alpha f\|_{L^2}^{\frac{2\alpha+1}{4}}\,\|\Lambda^\alpha\nabla^2 f\|_{L^2}^{\frac{3-2\alpha}{4}},\qquad (161022:goal)$$

where $1<\alpha\leqslant\frac32$, $\Lambda=(-\Delta)^{\frac12}$. [数学考研竞赛00093]

7. Suppose that $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ and $g \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ with $1 < p, q < \infty$, $1/p+1/q = 1$. Then $\nabla(fg)$ is in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Furthermore, we have @跟锦数学微信公众号

$$\|\nabla(fg)\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} + C\|f\|_{L^p}\|\nabla g\|_{L^q}, \qquad (lem: Hardy_bilinear: ine$$

where C is independent of f and g . [数学考研竞赛00981]

8. 对 $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \geqslant 1$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$(|x|^{\beta-1}x - |y|^{\beta-1}y)\cdot(x-y) \geqslant \frac{1}{2}\left(|x|^{\beta-1} + |y|^{\beta-1}\right)|x-y|^2,$$

且 $\frac{1}{2}$ 不能再改进. 这里, @跟锦数学微信公众号

$$x\cdot y = \sum_{i=1}^n x_iy_i, \quad x = (x_1, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, \cdots, y_n).$$

[数学考研竞赛00984]

9. For $f \in \dot{B}^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $g, h \in H^1(\mathbb{R}^3)$ and any $\varepsilon > 0$, $0 < r < 1$, $k \in \{1,2,3\}$, we have @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k f\cdot gh\,\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^r_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{1+r}}\|(g,h)\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla(g,h)\|_{L^2}^2. \qquad (lem: me: ineq)$$

[数学考研竞赛00985]

equality If $1 < p < +\infty$, $r \neq 1$, $f \geqslant 0$, and @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & r > 1,\\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t, & r < 1,\end{cases}$$

then @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p\int_0^\infty x^{-r}(xf)^p\,\mathrm{d}x. \qquad (Hardy: general)$$

[数学考研竞赛00986]

10. Let $\frac{3}{2} < q < 3$, and $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$, we have @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}^3}|f|^2|g|^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \leqslant C\|\nabla f\|_{L^q}^2\|g\|_{L^2}^{\frac{2(2q-3)}{q}}\|\nabla_h g\|_{L^2}^{\frac{2(3-q)}{q}},$$

where C depends only on q. [数学考研竞赛00987]

11. Let λ_1, ν, α be positive and $\beta > 3$. If @跟锦数学微信公众号

$$\lambda_1 \nu^2 [\nu\alpha(\beta-1)]^{\frac{2}{\beta-3}} > \frac{\beta-3}{\beta-1},$$

then there exists a positive δ such that @跟锦数学微信公众号

$$\nu\lambda_1 + \alpha(|x|^{\beta-1} + |y|^{\beta-1}) - \frac{1}{2\nu}(|x|^2+|y|^2) \geqslant \delta, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

[数学考研竞赛00997]

E P 307 Integrate by parts to prove @跟锦数学微信公众号

$$\|Du\|_{L^p} \leqslant C\,\|u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}}\,\|D^2u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

for $2 \leqslant p < \infty$ and all $u \in C_c^\infty(U)$. [数学考研竞赛00998]

E P 309 Use the Fourier transform to prove that if $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ for $s > n/2$, then $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, with the bound @跟锦数学微信公众号

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

[数学考研竞赛00999]

12. 设 X 是 Banach 空间, f 是 X^2 到 X 的双线性映射. 若 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ 0 < \alpha < \frac{1}{4\,\|f\|}, \quad \|f\| = \sup_{\|u\|,\|v\|\leqslant 1} \|f(u,v)\|,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ a \in B(0,\alpha),\ \exists\ |\ x \in B(0,2\alpha),\ \text{s.t. } x = a + f(x,x).$$

[数学考研竞赛01022]

13. 可表示拟阵 [数学考研竞赛01054]

14. 科研思路 [数学考研竞赛01084]

15. 科研思路 [数学考研竞赛01085]

16. 弱收敛的一个充分条件 [数学考研竞赛01094]

17. Δf 乘以 $|f|^{q-2}f$ 后的积分如何化简? [数学考研竞赛01099]

18. $-\int \Delta u \cdot |u|^{q-2}u$ 的化简 [数学考研竞赛01103]

19. @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha(fg)-(D^\alpha f)g\|_{L^2}\leqslant C\left(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^m}+\|f\|_{H^{m-1}}\|\nabla g\|_{L^\infty}\right).$$

[数学考研竞赛01114]

20. Assume that a is a positive constant, $x(t),y(t)$ are two nonnegative $C^1(\mathbb{R}^+)$ functions, and $D(t)$ is a nonnegative function, satisfying @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)+D\leqslant a(x^2+y^2+x+y)D.$$

If additionally, the initial data satisfy @跟锦数学微信公众号

$$x^2(0)+y^2(0)+\sqrt{2(x^2(0)+y^2(0))}<\frac{1}{a},$$

then, for any $t>0$, one has @跟锦数学微信公众号

$$x^2(t)+y^2(t)+x(t)+y(t)<x^2(0)+y^2(0)+\sqrt{2(x^2(0)+y^2(0))}<\frac{1}{a}.$$

[数学考研竞赛01115]

21. For $f\in H^s(\mathbb{R}^3)$ with $s>\frac{3}{2}$, we have @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{L^\infty}\leqslant C\left(1+\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\right)\ln\left(1+\|f\|_{H^s}\right),\quad s>\frac{3}{2}.$$

[数学考研竞赛01116]

22. @跟锦数学微信公众号

$$(\nabla\times b)\times b=-\nabla\frac{|b|^2}{2}+(b\cdot\nabla)b.$$

[数学考研竞赛01117]

23. @跟锦数学微信公众号

$$\nabla\times(a\times b)=(b\cdot\nabla)a-(a\cdot\nabla)b+a(\nabla\cdot b)-b(\nabla\cdot a).$$

[数学考研竞赛01139]

24. @跟锦数学微信公众号

$$0<p<\infty\Rightarrow H_p=\dot{F}^0_{p,2};\quad BMO=\dot{F}^0_{\infty,2}.$$

[数学考研竞赛01140]

25. @跟锦数学微信公众号

$$\nabla \cdot b = 0 \Rightarrow \nabla \times [(\nabla \times b) \times b] = \nabla \times [\nabla \cdot (b \otimes b)].$$

[数学考研竞赛01141]

26. @跟锦数学微信公众号

$$\dot{B}^0_{\infty,2} \subsetneq BMO.$$

[数学考研竞赛01142]

27. Let @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p, q \leqslant r \leqslant \infty, \quad 0 < \theta < 1, \\ -\lambda + \frac{n}{p} < \frac{n}{r} < -\mu + \frac{n}{q}, \\ \frac{n}{r} = (1-\theta)\left(-\lambda + \frac{n}{p}\right) + \theta\left(-\mu + \frac{n}{q}\right). \end{aligned}$$

Then @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{r,1}} \leqslant \|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^\lambda_{p,\infty}} \|f\|^\theta_{\dot{B}^\mu_{q,\infty}}.$$

[数学考研竞赛01144]

28. 设 H^{-1} 是 H^1_0 的对偶空间, 定义域为 $[0,1]$. 试证: (1) $\{h\sin(2\pi hx);\ h > 0\}$ 在 H^{-1} 中有界; (2) 试求 $h\sin(2\pi hx)$ 在 H^{-1} 中的弱极限. [数学考研竞赛01173]

29.

30. 对速度 $u = (u_1, u_2, u_3)$, 其旋度定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\omega = \nabla \times u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

而有公式 @跟锦数学微信公众号

$$\nabla \cdot u = 0 \Rightarrow \nabla \times [(u \cdot \nabla) u] = (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla) u.$$

[数学考研竞赛01213]

31. 求解 Cauchy 问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x - u = 0, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}.$$

[数学考研竞赛01232]

文学

第四章　　数学考研竞赛题海

Contents

00001

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有界, $|f'(x)|<1$. 证明存在 $M<1$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(0)|\leqslant M|x|,\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

00002

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 则对任意 $x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{2}(x-b)f''(\xi).$$

00003

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)$, 其中 $a>0$. ((中山大学2019年))

00004

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sin x-\tan\tan x}{x^3}$. ((华东师范大学2020数分))

00005

设 $f(x)$ 二次可导, $f(0)=f'(0)=f(1)=0$, 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+(4\xi^2+2)f(\xi)=0$. ((江西师范大学2013高数))

00006

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, 对于任意点 $x_0\in(0,1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=f(x_0)$. ((河南大学2020年))

00007

求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(2x-2t)\,\mathrm{d}t},$$

其中 $f(0)\neq 0$. ((中国科学技术大学2020数分))

00008

设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可微, 且满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证: 在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

00009

若 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$. ((兰州大学2020数分))

00010

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

((第8届全国大学生数学竞赛非数学类预赛试题))

00011

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0,f(1)=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

((第8届全国大学生数学竞赛非数学类预赛试题))

00012

((积分形式的 Jensen 不等式)) 设函数 φ 在区间 $[0,a]$ 上连续, 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f''(x)\geqslant 0,\quad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t.$$

00013

设 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1 g(x)\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}g(0^+).$$

((中国科学技术大学2020数分))

00014

证明恒等式 @跟锦数学微信公众号

$$\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

00015

计算曲线 @跟锦数学微信公众号

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2\geqslant a^2$$

所围成的面积.

00016

试证: 对任意无理数 α 和任意正整数 n, 都存在正整数 q_n 和整数 p_n 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{nq_n},\quad\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}.$$

00017

设 $\alpha \in (0,1)$, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha]$.

00018

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$.

00019

定义数列 $\{a_n\}$ 的上下极限分别为 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} a_k, \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} a_k.$$

试证: $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, 且当极限存在时, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

00020

试证: 对正数列 $\{a_n\}$ 有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} a_n}, \quad \varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf_{n\to\infty} a_n}$.

00021

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为数列且 $\{a_n\}$ 收敛, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n, \varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

00022

设 @跟锦数学微信公众号

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1+\cdots+a_n} \ (n \geqslant 1).$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1$.

00023

设 $a_1>0$, $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ $(n\geqslant 1)$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(na_n-2)}{\ln n}=\frac{2}{3}.$$

00024

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$.

00025

(1) 证明方程 $\tan x=x$ 在 $\left(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在实根 ξ_n, $n=1,2,\cdots$; (2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_{n+1}-\xi_n)$.

00026

设 $a_0=\pi$, $a_1=\pi^2$, $a_{n+1}=a_n+\frac{2a_{n-1}}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 试证: $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 收敛.

00027

已知 $a_0>0$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

00028

判断: 若对数列 $\{a_n\}$ 的任意两个子列 $\{a_{n_k}\}$ 与 $\{a_{m_k}\}$, 均有 $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}-a_{m_k})=0$, 则$\{a_n\}$ 收敛.

00029

设 @跟锦数学微信公众号

$$a_0=0,\quad a_{n+1}=a_n+\mathrm{e}^{-a_n}\ (n\geqslant 0).$$

再设 $b_n=a_n-\ln n$ $(n\geqslant 1)$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$0<b_{n+1}<b_n,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

00030

设 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{2017},$$

试求 x.

00031

设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)>0$, 试求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t},$$

其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

00032

加强形式的积分第一中值定理: 中值定可在开区间内取得 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}&f\text{ 在 }[a,b]\text{ 上连续}\\ \Rightarrow&\exists\ \xi\in(a,b),\ \text{ s.t. }\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).\end{aligned}$$

00033

设 α 是无理数, 试证: $A=\{m+n\alpha;m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 也即: 任何一个开区间至少含有 A 中一元.

00034

设正数列 $\{a_n\}$ 适合 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n}=1$, 试证: $\{a_n\}$ 收敛.

00035

试求 $\displaystyle\int\frac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

00036

试证: $\{\cos n; n\in\mathbb{N}\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密.

00037

设 $f(x)=\dfrac{1+xe^x}{1+x}$, 试求 $f^{(5)}(0)$.

00038

试证: 函数 $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ 在 $x>0$ 时严格单调减少, 且成立 $\dfrac{x}{x^2+1}<f(x)<\dfrac{1}{x}$.

00039

设 f 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

00040

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的非负函数, 适合 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx=1,\quad\int_{\mathbb{R}}xf(x)\,dx=0,\quad\int_{\mathbb{R}}x^2f(x)\,dx=1.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$x>0\Rightarrow\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt\geqslant\frac{x^2}{1+x^2};\quad x<0\Rightarrow\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

00041

设 $M\geqslant 1$ 是一正数, μ 是一个概率测度, 试证: 对 $0\leqslant f\leqslant M$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\ln\int f\,d\mu-\int\ln f\,d\mu\right|\leqslant\frac{M\|g\|_{L^2}}{\|f\|_{L^1}},$$

其中 $g=\ln f-\int\ln f\,d\mu$.

00042

试举一个不满足 A_1 公理 (A_2 公理) 的拓扑空间.

00043

试举一个拓扑空间 X, 其有一子集 Y, 是有界闭的, 但不是紧致的.

00044

平面上的两个互不相交的闭集的距离一定大于零么?

00045

设 $0<F\in C[a,b]$ 单调减少, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b xF^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b xF(x)\,\mathrm{d}x.$$

00046

设 $[a,b]$ 上的函数 f,g 适合 @跟锦数学微信公众号

$$[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)]\geqslant 0,\quad\forall\ x,y\in[a,b].$$

又设 $0<p\in\mathcal{R}[a,b]$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

00047

设 @跟锦数学微信公众号

$$A^3=2E,B=A^2-2A+2E,$$

求 B^{-1}.

00048

设 $f \in C[0,1]$ 适合 $0 \leqslant f < 1$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

00049

设 A,B,C,D 均是 n 阶方阵, $AC=CA$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

00050

设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n}=1$.

00051

设 $f \in C^{2n}[a,b]$ 适合 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(2n)}(x)|.$$

00052

设函数 $f,g \in C[a,b]$ 适合 $f(x)\neq 0$, $g>0$. 记 @跟锦数学微信公众号

$$d_n=\int_a^b |f(x)|^n g(x)\,\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots.$$

试证: 数列 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限.

00053

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$.

00054

对 $a\in\mathbb{R}$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right)=\mathrm{e}^{-\frac{a^4}{2}}.$$

00055

设 f 是 $[1,\infty)$ 上的非负单调减少函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x,\ \ n=1,2,\cdots.$$

试证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

00056

求 $\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 Γ 由 $\left\{\begin{array}{rl}x^2+y^2+z^2&=a^2\\x+z&=a\end{array}\right.$ 决定.

00057

设方程 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 中的第 n 个解为 x_n. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

00058

设 $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 适合 @跟锦数学微信公众号

$$rf\in L^1(\mathbb{R}^3),\ \frac{f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),\ \frac{f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 试证: 对 $1\leqslant p\leqslant 2$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leqslant\|rf\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac12}\left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac1p-\frac12}\left\|\frac{f}{r}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{1-\frac1p}.$$

00059

设 $f(x,y,z)=f(r,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$ 适合 $\lim\limits_{r^2+z^2\to\infty}f(r,z)=0$, @跟锦数学微信公众号

$$r\nabla f\in L^1(\mathbb{R}^3),\quad \frac{\nabla f}{r}\in L^1(\mathbb{R}^3),\quad \frac{\nabla f}{r}\in L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leqslant\sqrt{2}\,\|r\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac14}\left\|\frac{\nabla f}{r}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac14}\left\|\frac{\nabla f}{r}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\frac12}.$$

00060

试求 $\displaystyle\int\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

00061

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 适合 $f\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 再设 $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 适合 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ C>0,\ \exists\ x_0\in\mathbb{R}^2,\ \text{s.t. }|K(x)|\leqslant\frac{C}{|x-x_0|},\quad\forall\ x\in\mathbb{R}^2.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}K(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant2\sqrt{2\pi}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac12}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac12}.$$

00062

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)+s}}=2\int_0^{\pi}\frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2(1-\cos\phi)+s}},\quad s>0.$$

00063

设 $n\in\mathbb{N}_+$, $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$.

00064

设 $f(r,z):\Omega=(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 适合 @跟锦数学微信公众号

$$r^3f\in L^1(\Omega),\quad rf\in L^1(\Omega),\quad f\in L^\infty(\Omega).$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\int_1^\infty|f|\frac{r^3}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\lesssim\|r^3f\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|rf\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

00065

设 f 在 $D=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant1\}$ 上除点 $z_0\in D$ 外处处解析, 且满足 (1) 在 D 内 f 没有零点; (2) $z\in\partial D\Rightarrow f(z)\in\partial D$; (3) z_0 是 f 的一阶极点. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ \theta\in\mathbb{R},\ \text{s.t. } f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\bar{z}_0z}{z-z_0}.$$

00066

已知函数 $f(x)=\ln x-ax$, 其中 a 为常数. 如果 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2. 试证: $x_1x_2>\mathrm{e}^2$.

00067

设 $A=(a_{ij})$, 且定义 @跟锦数学微信公众号

$$\nabla_Af(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right).$$

试证: (1) $\nabla_A\mathrm{tr}\,(AB)=B^T$; (2) $\nabla_A\mathrm{tr}\,(ABA^TC)=CAB+C^TAB^T$.

00068

试求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2x}\mathrm{d}x$.

00069

设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 存在, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$. 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)+2\xi f'(\xi)=0$.

00070

设 $f\in C^2[0,1]$ 适合 $f(0)=f(1)=0$, $f\not\equiv 0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x,\quad \forall\ x\in[0,1].$$

00071

设 M 为自然数集, 试给出 M 的两个双射变换 σ,τ 使得 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

00072

证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty}R^\lambda\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$.

00073

求行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n(b,a)=\begin{vmatrix}b&a&\cdots&a\\a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&b\end{vmatrix}_n,$$

其中 $n\geqslant 2$.

00074

证明: 若 f 在 x_0 处连续, 则 $|f|$ 在 x_0 处连续. 举例说明反之不成立.

00075

举例说明: f 在 x_0 处可导, 但 $|f|$ 在 x_0 处不可导. 反之也不对. 证明: 如果 f 在 x_0 处连续, $|f|$ 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处可导.

00076

证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 举例说明反之不成立.

00077

证明: 若 $|f|$ 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分存在, 则 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分存在. 举例说明反之不成立.

00078

证明: 若 f 在可测集 E 上是可测函数, 则 $|f|$ 也是 E 上的可测函数. 但反之不成立.

00079

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 试证: $A^n=A^{n-2}+A^2-E$, 并计算 A^{100}.

00080

试求 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^6)^2}$.

00081

A strong solution (by which we mean @跟锦数学微信公众号

$$u\in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^3))$$

) is in fact smooth.

This is a classical result, and can be located in many references. Here, we refer to Page 870–871 of the following paper:

Chen, Qionglei; Miao, Changxing; Zhang, Zhifei. The Beale-Kato-Majda criterion for the 3D magneto-hydrodynamics equations. Comm. Math. Phys. 275 (2007), no. 3, 861–872.

00082

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 试证: 在 $(0,1)$ 内存在不同的 λ, μ 使得 $f'(\lambda)[f'(\mu)+1]=2$.

00083

这段时间一直在看

[Gallay Thierry, Vladimir Sverak, Remarks on the Cauchy problem for the axisymmetric Navier-Stokes equations, arXiv preprint arXiv:1510.01036 (2015)].

一两个礼拜了. 那个 Proposition 2.4 终于验算完毕 (也确实得到了作者给出的条件, 不过确实过程复杂, 写出来也乱). 总结下教训: 开始没注意到 (28) 最前面有个系数 $r^\alpha/\bar r^\beta$; 后来又没注意到不同 cases 时在 "$\xi^\beta F'(\xi)$ 有界" 所选取的 β 不同; 最后在不同 cases 时, 如何估计又失算了, 少算了一两个可能情形. 如此耗费时间...问作者又没丝毫回应. 不过现在也好了.

00084

已知函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 计算 $f^{(i)}(0)$, $i=1,2,3$.

00085

试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}$.

00086

试证: 当 $0<x<1$ 时, $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

00087

设 $a_n\geqslant 0,\ (n\in\mathbb{Z}_+)$; $A_n=\sum_{k=0}^n a_k$. 再设 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0.$$

试证: 级数 $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ 的收敛半径 $r=1$.

00088

试求 $\prod_{n=2}^\infty\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

00089

设 $h(t)$ 是 $[0,T)$ 上的连续函数, 适合 $\lim_{t\to T^-}h(t)=+\infty$. 再设 @跟锦数学微信公众号

$$H(t)=\max_{0\leqslant s\leqslant t}h(s),\quad 0\leqslant s<T.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ t_k\nearrow T,\ \text{s.t. } h(t_k)=H(t_k)\nearrow+\infty.$$

00090

设 A,B,C 均为 n 阶方阵.

(1) 证明 $\begin{pmatrix}A&A\\C-B&C\end{pmatrix}$ 可逆的充要条件是 AB 可逆; (2) 若 $\begin{pmatrix}A&A\\C-B&C\end{pmatrix}$ 可逆, 求出 $\begin{pmatrix}A&A\\C-B&C\end{pmatrix}$ 的逆.

00091

(1) 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 任取 A 的 r 个线性无关的行向量, 再取 A 的 r 个线性无关的列向量, 试证它们对应的行列构成的 r 阶子式不为零. (2) 设对称矩阵 A 的秩为 r, 试证: A 有一个非零的 r 阶主子式.

00092

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n^2 维线性空间 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义 V 上的二元函数 @跟锦数学微信公众号

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\ (P,Q)\mapsto \operatorname{tr}(P^TQ),\quad \forall\ P,Q\in V.$$

并记 $|P|^2=\langle P,P\rangle$. 试证: (1) V 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为一个欧氏空间; (2) @跟锦数学微信公众号

$$\langle P,Q\rangle\leqslant\left|\frac{P+Q}{2}\right|^2,\quad \forall\ P,Q\in V.$$

00093

@跟锦数学微信公众号

$$\|\nabla f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|\Lambda^\alpha f\|_{L^2}^{\frac{2\alpha+1}{4}}\left\|\Lambda^\alpha\nabla^2 f\right\|_{L^2}^{\frac{3-2\alpha}{4}},\tag{1}$$

where $1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$, $\Lambda=(-\Delta)^{\frac12}$.

00094

设 @跟锦数学微信公众号

$$l_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n,\quad i=1,2,\cdots,p+q,$$

这里 $c_{ij}\in\mathbb{R}$. 试证明实二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$$

的正惯性指数 $\leqslant p$, 负惯性指数 $\leqslant q$.

00095

设 A 是 n 阶半正定矩阵, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$a_{ii}=0 \Rightarrow a_{kl}=0,\ k=i \text{ 或 } l=i.$$

这即说明: 若半正定矩阵某对角元为 0, 则其所在的行与列中的元素均为 0.

00096

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\nearrow$, $f(0)>0$, $f(1)<1$. 试证: $\exists\ x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0^2$. (福建师范大学)

00097

设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵, B 是非零的 $m\times 1$ 阶矩阵. 考虑线性方程组 $AX=B$, 其中 X 是变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的列向量. 证明: (1) 线性方程组 $AX=B$ 的任意有限个解向量 $X_1,\cdots,X_k$ 的向量组的秩 $\leqslant n-r+1$. (2) 若线性方程组 $AX=B$ 有解, 则它有 $n-r+1$ 个解向量是线性无关的.

00098

设 A 为 n 阶实矩阵, $\lambda_t=r+s\mathrm{i}$ 是 A 的特征根, 其中 r,s 是实数, i 是虚数单位. (1) 证明: $\dfrac{1}{2}(A+A^T)$ 的特征根都是实数; 令 $\mu_1\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$ 是 $\dfrac{1}{2}(A+A^T)$ 的全部特征根; (2) 证明: $\mu_1\leqslant r\leqslant\mu_n$. (3) 你有类似的估计 s 的办法吗?

00099

设 A 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵, 向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ (实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维列空间), 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha, A\alpha, A^2\alpha,\cdots, A^{n-1}\alpha$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵 B 满足条件 $AB=BA$. 证明:

(1) 存在实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $B\alpha=f(A)\alpha$;

(2) 对于 (1) 中找到的多项式 $f(x)$, 必有 $B=f(A)$.

00100

设 A 是 n 阶方阵, $b\neq 0$ 是 n 维列向量, 适合 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=r$. 记 $Ax=b$ 的所有解集合为 S, 试证: (1) S 中含有 $n-r+1$ 个线性无关的向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$; (2) ξ 是 S 中元素的充要条件是存在 k_i $(1\leqslant i\leqslant n-r+1)$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i=1$, $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}k_i\eta_i$.

00101

设 m,n 是正整数. 证明: $(x^m-1,x^n-1)=x-1$ 当且仅当 $(m,n)=1$.

00102

设正整数 m 与 n 为一奇一偶, 请简略地说明此时有: $(x^m+1,x^n+1)=1$.

00103

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 请简略说明一定存在正整数 m, 使得 $\mathscr{A}^{2m}V=\mathscr{A}^mV$.

00104

证明: @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant\iint\limits_{\Omega}\sin(x^2)+\cos(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2},$$

其中 $\Omega=\{(x,y);\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

00105

设 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ 为非负数列, 而且对任意 $k\geqslant 0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$a_{k+1}^2\leqslant(a_k+b_k)^2-\xi_k^2.$$

(1) 证明: $\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 \leqslant \left(a_1+\sum_{i=0}^{k}b_i\right)^2$. (2) 若数列 $\{b_k\}$ 还满足 $\sum_{k=0}^{\infty}b_k^2 < \infty$, 则 $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2=0$.

00106

若广义积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$ 收敛, 试求实数 p 的取值范围.

00107

求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha>0$, $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数.

00108

使用连续函数的介值定理证明: 对于平面上给定的一个三角形, 在任意方向上都存在一条直线, 能将三角形分成面积相等的两部分.

00109

(1) 函数 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $u'(x)$ 绝对可积. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in[0,1]}|u(x)| \leqslant \int_0^1|u(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|u'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(2) 二元函数 $u(x,y)$ 在 $\Omega=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上连续, 且偏导数 u_x,u_y,u_{xy} 绝对可积. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{(x,y)\in\Omega}|u(x)| \leqslant \iint_\Omega |u|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_\Omega |u_x|+|u_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_\Omega |u_{xy}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

00110

求极限 $\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

00111

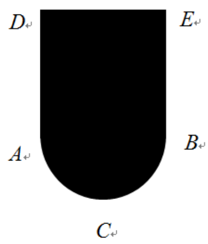
求不定积分 $\displaystyle\int \frac{2x+\sin 2x}{(\cos x - x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

00112

求定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

00113

如图，将一根钢丝折成两部分，一部分围成一个矩形 $ABED$ 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积之为 1，求钢丝长度的最小值.



00114

定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n+1}}, & \dfrac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\dfrac{1}{2^n}\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

00115

求积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D (5y^3+x^2+y^2-2x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D: 1\leqslant (x-1)^2+y^2\leqslant 4$ 且 $x^2+y^2\leqslant 1$.

00116

讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的敛散性, 其中 $p>0$.

00117

设由方程 $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ $(*)$ 确定函数 $z=z(x,y)$. (1) 计算 $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}$. (2) 如果以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为法向量的平面与 $(*)$ 交为圆, 求此法向量.

00118

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$$

00119

求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

00120

求定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

00121

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数, 求 $z''_{xy}(0,0)$.

00122

计算 $\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式

$$\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$$

所确定的区域.

00123

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

00124

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$ 的和.

00125

分析函数 $f(x,y)=(x^2+y^2-6y+10)\mathrm{e}^y$ 的极值问题.

00126

已知质线 $L:\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=1\end{cases}$ 的线密度 $\rho=|x^2+x-y^2-y|$, 求 L 的质量.

00127

已知 $a_n>0$, $a_1<1$, $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

00128

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt{\cos 2x}\cos x}{x-\ln(1+x)}.$$

00129

求曲线 $C:\ y=x^2$ 与直线 $L:\ y=x$ 所围图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

00130

计算 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\left\{(x,y);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

00131

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和.

00132

设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

00133

已知 $f(x)$ 连续且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求积分 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

00134

计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{(x-1)\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2+y^2},$$

其中 L 是从 $(-2,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

00135

证明: $(\cos x)^p\leqslant \cos(px)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0<p<1$.

00136

设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

00137

试证: $\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,\infty)$ 内不一致收敛.

00138

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, A 是一个 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵, 这里 n 是大于 1 的正整数. 用 E_{ij} 表示 (i,j) 位置为 1 其余位置为 0 的 n 阶 $\mathbb{F}$ 方阵. 证明以下 3 条等价:

(1) A 和所有 $\mathbb{F}$ 方阵相乘可交换;

(2) A 和所有可逆 $\mathbb{F}$ 方阵相乘可交换;

(3) A 和所有的 E_{ij} (其中 $1 \leqslant i,j \leqslant n$ 但是 $i \neq j$) 相乘可交换.

00139

[Abel 定理]设幂级数 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ 收敛. 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = s.$$

00140

设 $0<\alpha<1$, 求积分 $\int_0^1 f(t^{\alpha})\,\mathrm{d}t$ 的上确界, 其中连续函数 f 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 1.$$

00141

求极限 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1+x}{\sin^2 x}}$.

00142

求不定积分 $\int \frac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

00143

已知函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$ 的值.

00144

求函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y,z)=\frac{z}{1+xy}+\frac{y}{1+xz}+\frac{x}{1+yz}$$

在 @跟锦数学微信公众号

$$V=\{(x,y,z);0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$$

的最大值.

00145

已知 @跟锦数学微信公众号

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2},$$

其中 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 求 α,β 的值.

00146

记 @跟锦数学微信公众号

$$y_n(x)=\cos(n\arccos x),n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 证明当 $n\neq m$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=0.$$

(2) 求 $c_n,n=0,1,2,\cdots$ 使 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{e}^{\arccos x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny_n(x).$$

00147

设曲面 S 为: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}+z^2=1, z\geqslant 0.$$

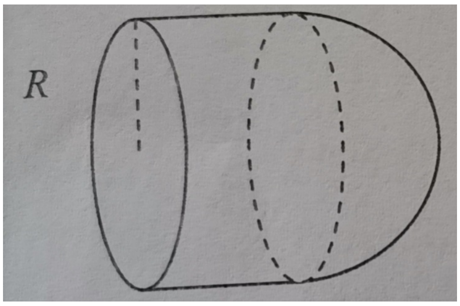
计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},$$

S 方向朝上.

00148

(满分 20 分) 如图, 设一个均匀物体是由体积相同的一个半球和一个圆柱拼接而成, 圆柱的地面与半球的大圆面重合, 底面半径为 R, 求此物体的重心.



00149

已知 $P_n(x)$ 为 n 次实系数多项式, 有 n 个不同实根. 证明: $P_n(x)+P_n'(x)$ 有 n 个不同的实根.

00150

求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

00151

求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int(1+x^n)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,\mathrm{d}x,$$

其中 n 为正整数.

00152

求定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2+(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

00153

设椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的线密度为 $\rho(x,y)=|xy|$, 求椭圆的质量.

00154

求级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n\cdot 2^n}$.

00155

设 $s(x)=\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t$.

(1) 求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}$,

(2) 问 $y=s(x)$ 是否有渐近线, 并说明理由.

00156

设 $a>0$ 是常数, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a\int_0^z\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

00157

设 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且 $\forall\ a>0, b>0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^{ab} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

求 $f(x)$ 的表达式.

00158

设连续函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足对 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(y)]=0,$$

其中 $f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right)$. 试问: 是否存在 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x\in(0,x_0), f(x)>x;\forall\ x\in(x_0,+\infty), f(x)<x.$$

00159

设 $x=0$ 是函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$$

的可去间断点, 则常数 $a=$____.

00160

设 $f(x)$ 是三次多项式, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=1.$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=$____.

00161

设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\geqslant1,\\ \mathrm{e}^{3x}-1, & x<1,\end{cases}$$

令 $y=f\left(f(x)\right)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=\text{____}.$$

00162

设曲线 $y=y(x)$ 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x-4y &= 3t^2+2t, \\ \mathrm{e}^{y-1}+ty &= \cos t \end{cases}$$

确定, 则该曲线在 $t=0$ 处的切线的方程是 ____.

00163

设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+x^{2020}$, 则 $f^{(2020)}(x)=$ ____.

00164

方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-100}=0$$

的实根共有 ____ 个.

00165

已知 @跟锦数学微信公众号

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=x\arctan x+C,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\int \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x= \underline{\qquad}.$$

00166

设曲线 $y=2\sqrt{x}$ 与直线 $y=kx$ 围成的平面图形为 D, 若 D 的面积为 $\frac{1}{3}$, 则 D 绕 y 轴旋转一周而成立体的体积 $V_y=$ ____.

00167

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)\neq 0$.

(1) 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)(\xi - a) + f(a)(b - \xi).$$

(2) 对 (1) 中的 ξ, 求 $\lim\limits_{b \to a^+} \dfrac{\xi - a}{b - a}$.

00168

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \sqrt[n]{n} - 1\right)$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

00169

设点 $A(2,-1,1)$, 直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_1: \begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{k} = \frac{z}{-1}.$$

是判断是否存在过点 A 的直线 l, 使它与两条已知直线 l_1, l_2 都相交? 如果存在, 请求出此直线的方程; 如果不存在, 请说明理由.

00170

设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 满足等式 @跟锦数学微信公众号

$$6z''_{xx} - z''_{xy} - z''_{yy} = 0.$$

已知变换 $u = x - 3y, u = x + ay$ 把上述等式简化为 $z''_{uv} = 0$.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 写出 $z = f(x, y)$ 的表达式.

00171

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^{y^2}}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}y.$$

00172

计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-y^2)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中 L 是 $y=-\cos \pi x$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段曲线.

00173

求曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+1)^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}$ 的上侧.

00174

求经过三平行直线 @跟锦数学微信公众号

$$L_1: x=y=z, L_2: x-1=y=z+1, L_3: x=y+1=z-1$$

的圆柱面的方程.

00175

设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, @跟锦数学微信公众号

$$F=\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

(1) 假设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

若 $AF=FA$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E.$$

(2) 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间 @跟锦数学微信公众号

$$C(F)=\left\{X\in\mathbb{C}^{n\times n};FX=XF\right\}$$

的维数.

00176

假设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 $(n>0)$, f,g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg-gf=f$, 证明: f 的特征值都是 0, 且 f,g 有公共特征向量.

00177

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并没在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)|\leqslant M$.

(1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2) 记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导, 为什么?

00178

设 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t,$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

00179

$f(x,y)$ 是 $\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}=x^2y^2,$$

计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'_x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

00180

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 过点 $A\,(0,f(0))$, 与点 $B\,(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C\,(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

00181

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{\qquad},$$

其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

00182

设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2,$$

则 $f(x)=\underline{\qquad}$.

00183

曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 $\underline{\qquad}$.

00184

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^{y}\ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f'\neq 1$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{\qquad}.$$

00185

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

00186

设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

00187

已知平面区域 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\},$$

L 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint\limits_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\geqslant \frac{5}{2}\pi^2$.

00188

已知 @跟锦数学微信公众号

$$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},$$
$$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},$$
$$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$$

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

00189

设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y\geqslant 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

00190

已知 @跟锦数学微信公众号

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x\ \ (n=1,2,\cdots),$$

且 $u_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

00191

求 $x\to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

00192

设 $\beta>\alpha>0$, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=$ ____.

00193

若关于 x 的方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1\ (k>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一实数解, 则常数 $k=$ ____.

00194

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 由积分中值公式有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x-a)f(\xi)\ \ (a\leqslant\xi\leqslant x<b).$$

若导数 $f_+'(a)$ 存在且非零, 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$ 的值等于 ____.

00195

设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=6$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\_\_\_\_.$$

00196

设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

00197

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$, 当自然数 $n\to\infty$ 时, $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

00198

设 $D=\{(x,y);x^2+y^2<1\}$, $f(x,y)$ 在 D 内连续, $g(x,y)$ 在 D 内连续有界, 且满足条件:

(1) 当 $x^2+y^2\to 1$ 时, $f(x,y)\to+\infty$;

(2) 在 D 中 f 与 g 有二阶偏导数, @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}=\mathrm{e}^{f},\quad g''_{xx}+g''_{yy}\geqslant\mathrm{e}^{g}.$$

证明: $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

00199

设 @跟锦数学微信公众号

$$R=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$R_{\varepsilon}=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,0\leqslant y\leqslant 1-\varepsilon\}.$$

考虑积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{R}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy},\quad I_\varepsilon=\iint\limits_{R_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy},$$

定义 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}I_\varepsilon$.

(1) 证明: $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

(2) 利用变量替换 $\begin{cases}u=\frac{1}{2}(x+y)\\ v=\frac{1}{2}(y-x)\end{cases}$ 计算积分 I 的值, 并由此推出 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

00200

已知两直线的方程 @跟锦数学微信公众号

$$L:x=y=z,L':\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}.$$

(1) 问: 参数 a,b 满足什么条件时, L 与 L' 是异面直线?

(2) 当 L 与 L' 不重合时, 求 L' 绕 L 旋转所生成的旋转面 π 的方程, 并指出曲面 π 的类型.

00201

设 A,B 均为 n 阶半正定实对称矩阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$n-1\leqslant \operatorname{rank}(A)\leqslant n.$$

证明: 存在实可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 和 $C^{\mathrm{T}}BC$ 均为对角阵.

00202

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $f_j:V\to\mathbb{C}\ (j=1,2)$ 是非零的线性函数, 且线性无关. 证明: 任意的 $\alpha\in V$ 都可表为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2),f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$

00203

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

00204

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, $a>0$.

00205

现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元, 而侧面的材料费为单位面积 b 元. 试给出最节省的设计方案: 即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少?

00206

已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x},$$

求 $f(x)$.

00207

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right];$$

00208

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n, \text{其中 } a>0, b>0, c>0.$$

00209

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义, 且在 $x=1$ 点可导, $f(1)=0, f'(1)=2$. 求

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

00210

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 无穷积分 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求 $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x$.

00211

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 且

$$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

证明:

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$;

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

00212

设 $n>1$ 为整数,

$$F(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t.$$

证明: 方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根.

00213

是否存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5?$$

若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明.

00214

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$, 当自然数 $n\to\infty$ 时, $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

00215

设 $\varepsilon\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$x_0=a, x_{n+1}=a+\varepsilon\sin x_n\ \ (n=0,1,2,\cdots).$$

证明 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 ξ 为方程$x-\varepsilon\sin x=a$ 的唯一根.

00216

设 @跟锦数学微信公众号

$$B=\begin{pmatrix}0&10&30\\0&0&2010\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

证明 $X^2=B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

00217

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x,y)$ 在 D 上连续. 注: 函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是$\forall\ \alpha\in(0,1)$ 以及 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\leqslant\alpha f(x_1,y_1)+(1-\alpha)f(x_2,y_2).$$

00218

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0, f'(1)=a$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=-a.$$

00219

已知二次曲面 Σ (非退化) 过以下九点: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}&A(1,0,0),B(1,1,2),C(1,-1,-2),D(3,0,0),\\&E(3,1,2),F(3,-2,-4),G(0,1,4),H(3,-1,-2),I(5,2\sqrt{2},8).\end{aligned}$$

问 Σ 是哪一类曲面?

00220

设 A 为 $n\times n$ 实矩阵 (未必对称), 对任一 n 维实向量 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\alpha A\alpha^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

(这里 α^{T} 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β 使得 $\beta A\beta^{\mathrm{T}}=0$. 同时对任意 n 维实向量 x 和 y, 当 $xAy^{\mathrm{T}}\neq 0$ 是有 @跟锦数学微信公众号

$$xAy^{\mathrm{T}}+yAx^{\mathrm{T}}\neq 0.$$

证明: 对任意 n 维实向量 v, 都有 $vA\beta^{\mathrm{T}}=0$.

00221

设 f 在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, $0\leqslant f\leqslant 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\ [\alpha,\beta]\subset[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_\alpha^\beta[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

00222

已知 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足 $\lim\limits_{t\to0^+}\varphi(t)=+\infty$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=a<+\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}[\varphi(t)]^2\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(t)]^2\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.$$

00223

设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

00224

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

00225

设 $s>0$, 求 $I_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

00226

设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $g''_{xx}+g''_{yy}$.

00227

求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线

$$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

的距离.

00228

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x)>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0, 使得 $f(x_0)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

00229

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)},$$

其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与 @跟锦数学微信公众号

$$y=\int_1^{t^2} \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 $t=1$ 处相切. 求函数 ψ.

00230

设 $a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leqslant 1$, 且 $S_n \rightarrow 0$ $(n \rightarrow \infty)$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

00231

设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线, 均匀椭圆 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

(其中 $0<c<b<a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量;

(2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

00232

设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(y)}{x^4+y^2}$$

的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0;$$

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

00233

求出过原点且和椭球面 $4x^2+5y^2+6z^2=1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

00234

设 $0<f(x)<1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

00235

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, @跟锦数学微信公众号

$$t_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n+k}+\cdots.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$.

00236

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad \sigma_A(X) = AX - XA.$$

证明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.

00237

设连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < +\infty.$$

证明: 存在实常数 a 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - ax| < +\infty.$$

00238

设 $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \quad \forall\ X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型 @跟锦数学微信公众号

$$(-,-) : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

如下: $(X, Y) = \varphi(XY)$.

(1) 证明 $(-,-)$ 是非退化的, 即若 $(X, Y) = 0, \forall\ Y \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = 0$.

(2) 设 $A_1, \cdots, A_{n^2}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, $B_1, \cdots, B_{n^2}$ 是相应的对偶基, 即 @跟锦数学微信公众号

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

证明 $\sum\limits_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 是数量矩阵.

00239

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}};$$

00240

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right);$$

00241

已知 $\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}), \\ y=t-\arctan\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

00242

求方程 @跟锦数学微信公众号

$$(2x+y-4)\,\mathrm{d}x+(x+y-1)\,\mathrm{d}y=0$$

的通解.

00243

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

00244

设 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中 $a>b>c>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_2: z^2=x^2+y^2,$$

Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

00245

已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分 $(z\geqslant 0)$ (取上侧), Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦. 计算:

(1) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}S$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S$.

00246

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数, 且 $|f'(x)|<mf(x)$, 其中 $0<m<1$. 任取实数 a_0, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots.$$

证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

00247

是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(2)=1, |f'(x)|\leqslant 1, \left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 1?$$

请说明理由.

00248

已知四点 @跟锦数学微信公众号

$$A(1,2,7), B(4,3,3), C(5,-1,6), D(\sqrt{7},\sqrt{7},0).$$

试求过这四个点的球面方程.

00249

设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

00250

设 $\mathbb{F}^n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维列空间, $\sigma: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ 是一个线性变换. 若对 $\mathbb{F}$ 上的任何 n 阶方阵 A, @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha),\ \ (\forall\ \alpha \in \mathbb{F}^n),$$

证明: $\sigma = \lambda\mathscr{E}$, 其中 λ 是 $\mathbb{F}$ 中某个数, $\mathscr{E}$ 表示 $\mathbb{F}^n$ 上的恒等变换.

00251

对于 $\triangle ABC$, 求 @跟锦数学微信公众号

$$3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$$

的最大值.

00252

对于任何实数 α, 求证: 存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}}\right) = \alpha.$$

00253

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

00254

设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0.$$

证明:

(1) $\lim_{x\to+\infty} xF(x)=0$,

(2) $\lim_{x\to0}\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t=0$.

00255

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}.$$

00256

设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

00257

求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

00258

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

00259

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a,λ 为有限数, 求证:

(1) 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

(2) 如果存在正整数 p, 使得 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

00260

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0.$$

求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0, 使得 $f'''(x_0) = 3$.

00261

在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 其线密度为 ρ. 在点 $(0,h)$ (其中 $h > 0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

00262

设 $z = z(x,y)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$$

确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 且 $F_u(u,v) = F_v(u,v) \neq 0$. 求证: $x^2 z'_x + y^2 z'_y = 0$ 和 @跟锦数学微信公众号

$$x^3 z''_{xx} + xy(x+y) z''_{xy} + y^3 z''_{yy} = 0.$$

00263

设函数 $f(x)$ 连续, a,b,c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 记第一型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证: $I = 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u\right)\,\mathrm{d}u$.

00264

设有空间中五点: @跟锦数学微信公众号

$$A(1,0,1), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,1,0), E(3,1,2).$$

试求过点 E 且与 A,B,C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

00265

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两阶导数, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t, \forall\ x\in[a,b].$$

00266

设 $k_0<k_1<\cdots<k_n$ 为给定的正整数, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为实参数. 指出函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\sin k_0x+A_1\sin k_1x+\cdots+A_n\sin k_nx$$

在 $[0,2\pi)$ 上零点个数的 (当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 变化时的) 最小可能值并加以证明.

00267

设正数列 $\{a_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n=1, \varlimsup_{n\to\infty} a_n<+\infty, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$

00268

设 A,B 分别是 3×2 和 2×3 实矩阵, 若 @跟锦数学微信公众号

$$AB=\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4\\ -\dfrac{3}{2} & 9 & -6\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

求 BA.

00269

设 $\{A_i\}_{i\in I},\{B_i\}_{i\in I}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个矩阵集合, 称它们在 $\mathbb{F}$ 上相似: 如果存在 $\mathbb{F}$ 上与 $i\in I$ 无关的可逆矩阵 P 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^{-1}A_iP=B_i,\forall\ i\in I.$$

证明: 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上两个矩阵集合 $\{A_i\}_{i\in I},\{B_i\}_{i\in I}$, 如果它们在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似, 则它们在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上也相似.

00270

设 $F(x),G(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个非负单调递减函数, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[F(x)+G(x)\right]=0.$$

(1) 证明: $\forall\ \varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty}xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$

(2) 若进一步有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left[F(t)-G(t)\right]\cos\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0.$$

证明: $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{+\infty}\left[F(t)-G(t)\right]\cos(xt)\,\mathrm{d}t=0.$

00271

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}.$$

00272

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right].$$

00273

设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_x'^2 f_{yy}'' - 2f_x' f_y' f_{xy}'' + f_y'^2 f_{xx}'' = 0,$$

且 $f_y' \neq 0$, $y = y(x,z)$ 是由方程 $z = f(x,y)$ 所确定的函数. 求 y_{xx}''.

00274

求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x.$$

00275

求曲面 $x^2 + y^2 = az$ 和 $z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$ $(a > 0)$ 所围立体的表面积.

00276

讨论 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^\alpha \sin^2 x}\, \mathrm{d}x$$

的敛散性, 其中 α 是一个实常数.

00277

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 并且满足: 存在 $M > 0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M, \forall\ x \in (-\infty,+\infty),\ \ (k = 1,2,\cdots),$$

且 $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = 0$, $(n = 1,2,\cdots)$. 求证: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $f(x) \equiv 0$.

00278

设 D 为椭圆形 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\ \ (a > b > 0),$$

面密度为 ρ 的均质薄板; l 为通过椭圆焦点 $(-c,0)$ (其中 $c^2=a^2-b^2$) 垂直于薄板的旋转轴.

(1) 求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J;

(2) 对于固定的转动惯量, 讨论椭圆薄板面积的是否有最大值和最小值.

00279

设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F(xz-y,x-yz)=0$$

(其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数) 唯一确定, L 为正向单位圆周. 试求: @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_L (xz^2+2yz)\,\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\,\mathrm{d}x.$$

00280

(1) 求解微分方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=xe^{x^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$

(2) 如 $y=f(x)$ 为上述方程的解, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

00281

设 Γ 为椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

00282

设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 共 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

00283

设 $f\in C^1[0,+\infty)$, @跟锦数学微信公众号

$$f(0)>0, f'(x)\geqslant 0, \forall\ x\in[0,+\infty).$$

若 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}<+\infty$, 求证: $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}<+\infty$.

00284

设 A,B,C 均为实 n 阶正定矩阵, @跟锦数学微信公众号

$$P(t)=At^2+Bt+C, f(t)=\det P(t),$$

其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 是$f(t)$ 的根, 证明: λ 的实部为负数.

00285

已知 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, |x|<1,$$

n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1}a_i$.

00286

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微, 其中 $\mathbb{R}$ 为实数集. 已知 $f(0)=f(1)$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f'(x)\neq 1$. 求证: 对任意正整数 n, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

00287

已知实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}.$$

证明:

(1) 矩阵方程 $AX=B$ 有解但 $BY=A$ 无解的充要条件是 $\begin{cases} a\neq 2, \\ b=\dfrac{4}{3}; \end{cases}$

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $\begin{cases} a=3, \\ b=\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $\begin{cases} a<2, \\ b=3. \end{cases}$

00288

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$;

00289

求通过直线 $L:\begin{cases} 2x+y-3z+2=0 \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2, 使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$;

00290

已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$, 且 $u''_{xy}=0$, 确定常数 a 和 b, 使得函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $z''_{xy}-z'_x-z'_y+z=0$;

00291

设函数 $u=u(x)$ 连续可微, $u(2)=1$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关, 求 $u(x)$;

00292

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t.$

00293

计算 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

00294

求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001.

00295

设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

00296

求最小实数 C, 使得对满足 $\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=1$ 的连续函数 $f(x)$, 都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x\leqslant C$.

00297

设 $f(x)$ 为连续函数, $t>0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的上半部分. 定义三重积分

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

00298

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数, 那么

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

00299

设 A 为正常数, 直线 L 与双曲线 $x^2-y^2=2\ (x>0)$ 所围成的有限部分的面积为 A. 证明:

(1) 上述 L 被双曲线 $x^2-y^2=2\ (x>0)$ 所截线段的中点的轨迹为双曲线;

(2) L 总是 (1) 中轨迹曲线的切线.

00300

设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f:[a,b]\to[a,b]$, 其中 $-\infty<a<b<\infty$;

(2) 存在常数 $0<L<1$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

设 $x_1\in[a,b]$, 令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在, 且 $f(x)=x$.

00301

设实 n 阶方阵 A 的每个元素的绝对值为 2. 证明: 当 $n\geqslant 3$ 时,

$$|A|\leqslant\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}n!.$$

00302

设 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数. 对 $x_0\in(a,b)$, 若存在 x_0 的领域 U 使得对任意的 $x\in U\setminus\{x_0\}$ 都有 $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点; 类似地, 若存在 x_0 的领域 U 使得对任意的 $x\in U\setminus\{x_0\}$ 都有 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 求证: 若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的二次可微函数, 且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

00303

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 记 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若 $|A|=-12$, A 的特征值的和为 1, 且 $(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 为 $(A^*-4I)x=0$ 的一个解. 试给出一正交变换 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

使得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准型.

00304

令 $\mathbb{R}$ 为实数域, n 为给定的正整数, A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合.证明: @跟锦数学微信公众号

$$\inf_{b\in\mathbb{R},\ c>0,\ P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x>0.$$

00305

计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right]\ (a>1)$.

00306

设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv,$$

求 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

00307

求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$, 使 $f(x)=\mathrm{e}^{-u(x)}$, 其中 $u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

00308

计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

00309

过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求此切平面的方程.

00310

设曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma: z^2=x^2+y^2, 1\leqslant z\leqslant 2,$$

其面密度为常数 ρ. 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力 (记引力常数为 G).

00311

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可导, @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

00312

设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)|<1$, 又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 试证在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

00313

求二重积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}|x^2+y^2-x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

00314

若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 都是收敛的, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

00315

平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点, 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周 (无滑动) 滚动一周, 这时,C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以 P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R, 记 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma:\ \mathbb{R}^2\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$$

为圆 C 的反演变换, 它将 $Q\in\mathbb{R}^2\setminus\{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 且满足 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ'}=R^2$. 求证: $\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

00316

设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $G(t)$ 分别是 @跟锦数学微信公众号

$$B(t)=(b_{ij}(t)),\quad b(t)=\begin{pmatrix}b_1(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{pmatrix},$$

其中 $b_{ij}(t)$ 和 $b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式,$i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)=\det B(t)$,$d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 代替 $B(t)$ 行列式中的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组. 试证明: $d(t),d_1(t),d_2(t),\cdots,d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

00317

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶连续可微,$f'(0)=1,f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x,x\in(0,a)$. 令 $x_{n+1}=f(x_n),x_1\in(0,a)$.

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 求出其极限; 若不收敛, 请说明理由.

00318

设 $a>1,f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于 $+\infty$ 的正数列 $\{x_n\}$, 使得 $f'(x_n)<f(ax_n)$, $n=1,2,\cdots$.

00319

设 $f:[-1,1\to\mathbb{R}$ 为偶函数,f 在 $[0,1]$ 上是增函数; 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即 @跟锦数学微信公众号

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y),\quad\forall\ x,y\in[0,1],\quad\forall\ t\in[0,1].$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

00320

设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体,E_{ij} 为 (i,j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 n 阶方阵,$i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $\varGamma_r$ 表示秩为 r 的实方阵全体,$r=0,1,2,\cdots,n$; 并让 $\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(AB)=\phi(A)\cdot\phi(B),\quad\forall\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

证明:

(1) 对 $\forall\ A,B\in\varGamma_r$, 有 $\operatorname{rank}\phi(A)=\operatorname{rank}\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在 $r=1$ 的矩阵 W 使得 $\phi(W)=0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1},\quad\forall\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

00321

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin \pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

00322

证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的.

00323

设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定.求 $y(x)$ 的极值.

00324

过曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ $(x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求点 A 的坐标.

00325

计算定积分

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

00326

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

00327

设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 证明:

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

00328

设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2y^3-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(3z^3-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ, 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

00329

设 $I_a(r)=\displaystyle\int_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

00330

判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 弱收敛, 求其和.

00331

设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. $P(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

00332

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(1) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(2) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

00333

设 n 阶实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1}\\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

有 n 个线性无关的特征向量, $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 均不为 0. 记 @跟锦数学微信公众号

$$W=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n};\ XA=AX\right\}.$$

证明: W 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 且 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 为其一组基, 其中 I 为 n 阶单位阵.

00334

设 $f(x,y)$ 为$[a,b]\times\mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$y'=f(x,y),\quad z'\leqslant f(x,z),\quad x\in[a,b].$$

已知 $z(a)\leqslant y(a)$. 求证: $z(x)\leqslant y(x)$, $x\in[a,b]$.

00335

设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\int_0^{\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta},\quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

00336

对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n\geqslant 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任何所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$ 都有 $d(f')\geqslant Cd(f)$.

00337

设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. $P(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

00338

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(1) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(2) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

00339

设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\int_0^{\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta},\quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

00340

对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n\geqslant 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任何所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$ 都有 $d(f')\geqslant Cd(f)$.

00341

设 $f(x,y)$ 为$[a,b]\times\mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$

是可微函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$y' = f(x, y), \quad z' \leqslant f(x, z), \quad x \in [a, b].$$

已知 $z(a) \leqslant y(a)$. 求证: $z(x) \leqslant y(x)$, $x \in [a, b]$.

00342

设 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 是单位圆盘. 非常值函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析, 且当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$. 求证: $f(D) = D$.

00343

设 E_k 是一列可测集, $f \in \mathcal{L}(\cup_{k=1}^{\infty} E_k)$.

(1) 令 $A = \overline{\lim_{k\to\infty}} E_k$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{k=n}^{\infty} E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $A = \underline{\lim_{k\to\infty}} E_k$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\cap_{k=n}^{\infty} E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 如果 $\{E_k\}$ 是单调的, 求证: $\lim_{k\to\infty} E_k = E$ 存在, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

00344

设 Γ 是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线, l 是 Γ 的准线. 将 Γ 绕其准线 l 旋转一周, 得到旋转面 S. 求 S 的两个主曲率的比值.

00345

一只盒子中装有标上 1 至 N 的 N 张票券. 由放回地一张一张地抽取. 若我们想收集 r 张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的.

00346

设群 $G=AB$, 其中 A,B 均为 G 的 Abel 群, 且 $AB=BA, \forall\ g_1,g_2\in G$, 用 $[g_1,g_2]$ 表示换位子, 即 @跟锦数学微信公众号

$$[g_1,g_2]=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1},$$

G' 表示 G 的换位子群 (即由 G 的换位子所生成的子群). 证明:

(1) $\forall\ a,x\in A, \forall\ b,y\in B$ 有下式成立: @跟锦数学微信公众号

$$\left[x^{-1},y^{-1}\right][a,b]\left[x^{-1},y^{-1}\right]^{-1}=[a,b].$$

(2) G' 为 Abel 群.

00347

给定多项式序列 @跟锦数学微信公众号

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x,$$
$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n=1,2,\cdots.$$

求证:

(1) 当 $x\in[-1,1]$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$T_n(x)=\cos\left(n\arccos x\right).$$

(2) 设 $C[-1,1]$ 是区间 $[-1,1]$ 上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\langle f,g\rangle:=\int_{-1}^1\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

则 $T_n(x)$ 是该内积空间的正交多项式, 即当 $n\neq m$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\langle T_n(x),T_m(x)\rangle=0.$$

(3) 设 $P(x)$ 是次数为 n 的首项系数为 1 的多项式. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\|P(x)\|_\infty\geqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

且等号成立当且仅当 @跟锦数学微信公众号

$$P(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x),$$

这里 $\|P(x)\|_\infty=\max\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)|$.

00348

计算积分 $\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt\,dx$.

00349

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足 $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. 求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx$$

取得最小值.

00350

设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} \neq 0$, 曲线 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在xOy 平面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程.

00351

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 矩阵 B 满足关系式 $AB = A - B + E$, 其中 E 是单位矩阵且 $B \neq E$. 若秩 $\operatorname{rank}(A+B) = 3$, 试求常数 a 的值.

00352

设 $f \in C^4(-\infty,+\infty)$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x+\theta h)h^2,$$

其中 θ 是与 x,h 无关的常数, 证明 f 是不超过三次的多项式.

00353

设当 $x>-1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

且 $f(0)=1$. 试证: 当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立.

00354

设 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数. 若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$ 且 $f''_{xy}\leqslant A$. 证明 $I\leqslant\frac{A}{4}$.

00355

设函数 $f(x)$ 连续可导, @跟锦数学微信公众号

$$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right),$$

邮箱曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I_t=\iint_{\Sigma_t}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4}$.

00356

设 A,B 是二个 n 阶正定矩阵. 求证 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$.

00357

假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

00358

已知空间的两条直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}; \quad l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}.$$

(1) 证明 l_1 和 l_2 异面;

(2) 求 l_1 和 l_2 的公垂线的标准方程;

(3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

00359

设 $f \in C[0,1]$ 是非负的严格递增函数.

(1) 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n \in [0,1]$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n \, dx.$$

(2) 证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

00360

设 V 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法和纯量乘法均为通常的. $f_1, \cdots, f_n \in V$. 证明以下两条等价:

(1) $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关;

(2) $\exists\ a_1, \cdots, a_n \in [0,1]$ 使得 $\det[f_i(a_j)] \neq 0$, 这里 det 表行列式.

00361

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零. 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leqslant af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(1) 求证: $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0$;

(2) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leqslant cf(x)$.

(3) 求使上面不等式成立的最小常数 c.

00362

设 m 为给定的正整数. 证明: 对任何的正整数 n, l, 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

00363

设 $\alpha \in [0,1]$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\lim_{n \to \infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证: $\lim\limits_{n \to \infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.

00364

已知 $y_1 = \mathrm{e}^x$ 和 $y_2 = x\mathrm{e}^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是____.

00365

设有曲面 $S: z=x^2+2y^2$ 和平面 $L: 2x+2y+z=0$, 则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 ____.

00366

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ____.

00367

设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$ ____.

00368

已知 $\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 则 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$ ____.

00369

设 n 为正整数, 计算 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x.$$

00370

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且存在正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A, |f''(x)|\leqslant B$. 证明: 对任意 $x\in[0,1]$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

00371

(1) 设一球缺高为 h, 所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leqslant 12$$

被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω. 记球缺上的球冠为 Σ, 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d} y \, \mathrm{d} z+y \, \mathrm{d} z \, \mathrm{d} x+z \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y .$$

00372

设 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n \in[a, b]$ 使得

$$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\frac{1}{b-a} \int_a^b[f(x)]^n \, \mathrm{d} x,$$

求 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n$.

00373

设

$$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2},$$

求 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

00374

实二次型 $2 x_1 x_2-x_1 x_3+5 x_2 x_3$ 的规范型 $=$ ____.

00375

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和 $=$ ____.

00376

计算第一型曲面积分的值:

$$I=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^2+2 y^2+3 z^2\right) \mathrm{d} S= \_\_\_\_ .$$

00377

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\mathrm{rank}\,(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11}=$____.

00378

设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p, 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值, a. 求该球面族的球心的轨迹.

00379

设 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2\\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1\end{pmatrix};\ z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 表复数域. 试证: $\forall\ A\in\Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P\in\Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

00380

设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求最大常数 α 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty.$$

00381

设 $a(t),f(t)$ 为实连续函数, $\forall\ t\in\mathbb{R}$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$f(t)>0,a(t)\geqslant 1,\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\quad \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界.

00382

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

00383

实二次型 $2x_1x_2-x_1x_3+5x_2x_3$ 的规范型 $=$ ____.

00384

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的和 $=$ ____.

00385

计算第一型曲面积分的值: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}S=\_\_\_\_.$$

00386

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\operatorname{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11}=$ ____.

00387

设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p, 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值, a. 求该球面族的球心的轨迹.

00388

设 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix};\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 表复数域. 试证: $\forall\ A \in \Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

00389

设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求最大常数 α 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty.$$

00390

设 $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$f(t)>0, a(t)\geqslant 1, \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界.

00391

设 a,b 是两个不同的复数, 求满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$[f'(z)]^2=[f(z)-a]\cdot[f(z)-b]$$

的非零整函数 $f(z)$.

00392

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为 K, 则对任意的可测集 $E\subset\mathbb{R}^1$, 均有 @跟锦数学微信公众号

$$m[f(E)]\leqslant K\cdot m(E).$$

00393

设三维空间的曲面 S 满足:

(1) $P_0=(0,0,-1)\in S$;

(2) 对任意 $P\in S$, $|\overrightarrow{OP}|\leqslant 1$, 其中 O 是原点.

证明: 曲面 S 在 P_0 的 Gauss 曲率 $K(P_0)\geqslant 1$.

00394

考虑求解线性方程组 $Ax=b$ 的如下迭代格式 @跟锦数学微信公众号

$$(\alpha D-C)x^{(k+1)}=[(\alpha-1)D+C^{\mathrm{T}}]x^{(k)}+b,$$

其中 D 为实对称正定矩阵, C 是满足 $C+C^{\mathrm{T}}=D-A$ 的实方阵, α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵, 且 $\alpha D-C$ 可逆, $\alpha>1/2$, 证明: 上述迭代格式对任何初始向量 $x^{(0)}$ 收敛.

00395

设 R 是 $[0,1]$ 上连续函数环, 其加法和普通的函数加法, 乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的极大左理想. 证明: $\forall\ f,g\in I$, f 与 g 在 $[0,1]$ 上必有公共的零点.

00396

设在国际市场上有我国某种出口商品每年的需求量 X (单位: 吨) 是随机变量, X 服从 $[100,200]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一顿, 可以为国家挣得外汇 3 万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求: 应组织多少货源, 才能使国家的收益最大?

00397

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\,\mathrm{d}u}$ 的值是 ____.

00398

设实数 $a\neq 0$, 微分方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y''(x)-a[y'(x)]^2=0\\ y(0)=0, y'(0)=-1\end{cases}$$

的解是 ____.

00399

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\-1&1&\lambda\end{pmatrix}$, 则 $A^{50}=$ ____.

00400

不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=$ ____.

00401

设曲线积分 $I=\displaystyle\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$, 其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时针, 则 $I=$ ____.

00402

设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域, 其面积为 $A>0$, 函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续且 $f(x,y)>0$. 记

$$J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right)^n,$$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=$____.

00403

设 $l_j, j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n\geqslant 2$ 个方向向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导数, 证明 $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_j}=0$.

00404

设 A_1,A_2,B_1,B_2 均为 n 阶方阵, 其中 A_2,B_2 可逆. 证明: 存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$PA_iQ=B_i\ \ (i=1,2)$$

成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似.

00405

设 $p>0, x_1=\frac{1}{4}$, 且

$$x_{n+1}^p=x_n+x_n^{2p}\ \ (n=1,2,\cdots),$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛且求和.

00406

(1) 将 $[-\pi,\pi)$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开成傅里叶级数, 并证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u$ 的值.

00407

设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数, 若

$$I=\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在且有限, 则称广义积分 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I.

(1) 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上非负连续函数. 若 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I, 证明极限

$$\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\leqslant x,y\leqslant t} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在且等于 I.

(2) 设 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I, 其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于 0.

00408

设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 v 为直线方向; 直线 L_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 w 为直线方向.

(1) 证明: 存在唯一点 $P\in L_1$ 和 $Q\in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2.

(2) 求 P 点和 Q 点坐标 (用 a,b,v,w 表示).

00409

A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\operatorname{tr} A^i=i$, $i=1,2,3,4$. 求 A 的行列式.

00410

设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X+AX-XA^2=0$$

只有零解.

00411

数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n},\quad a_1>0.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-n)$ 存在.

00412

设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x=a<$
构造函数列如下: @跟锦数学微信公众号

$$g_0(x)=h(x),\quad g_n(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\quad (n=1,2,\cdots).$$

求证: $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

00413

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)+a\int_{x-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

为常数. 求证: $f(x)$ 为常数.

00414

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ ____.

00415

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$$

所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 且 $xF_u+yF_v\neq 0$. 则

$$xz'_x+yz'_y=\_\_\_\_.$$

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数)

00416

曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 ____.

00417

函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值是 ____.

00418

设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为

$$u(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t,$$

则 $u(x)$ 的初等函数表达式是 ____.

00419

设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程.

00420

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α,β, 使得对于 $\forall\ x\in(a,b)$, 有

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

00421

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域, 及其和函数.

00422

设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

试证:

(1) $\exists\ x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$;

(2) $\exists\ x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$.

00423

设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f_{xx}''^2+2f_{xy}''^2+f_{yy}''^2\leqslant M.$$

若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

00424

设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1. 则 $\sum_{A\in\Gamma}|A|=$____.

00425

令 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是____.

00426

设 $D: x^2+2y^2\leqslant 2x+4y$, 则积分 $I=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____.

00427

若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016}=I_2,$$

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X=$ ____.

00428

在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

00429

设 A,B 为 n 阶实对称矩阵. 证明: $\operatorname{tr}\left((AB^2)\right)\leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2)$.

00430

设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi.$$

00431

设 $a(t),f(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $a(x)>0$. 已知 $\int_0^{\infty}a(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{a(x)}=0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$y'(x)+a(x)y(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

00432

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$xf(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$.

00433

设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1. 则 $\sum\limits_{A\in\Gamma} |A| =$ ____.

00434

令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x\,\mathrm{d}x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是____.

00435

设 $D: x^2+2y^2 \leqslant 2x+4y$, 则积分 $I = \iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ ____.

00436

若实向量 $X = (a, b, c)$ 的三个分量 a, b, c 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2,$$

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X =$ ____.

00437

在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

00438

设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明: $\operatorname{tr}\left((AB^2)\right) \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)$.

00439

设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 令 P_A, P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$P_A^{\frac{1}{3}} \cdot P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi.$$

00440

设 u_1, u_2, v_1, v_2 为群 G 中的元素, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$u_1v_1 = v_1u_1 = u_2v_2 = v_2u_2.$$

若 u_1, u_2 的阶均为 8, v_1, v_2 的阶均为 13. 证明: u_1u_2 的阶为 4 及 v_1v_2 的阶为 13.

00441

设 $E \subset \mathbb{R}^1$, E 是 L-可测的. 若 $mE > a > 0$, 则存在无内点的有界闭集 $F \subset E$, 使得 $m(F) = a$.

00442

设 $\gamma(s)$, $s \in [0, l]$ 是空间中一条光滑闭曲线, 以弧长为参数, 且曲率为 $k > 0$. 设 $\beta : [0, l] \to S^2$ 为单位球面上由 $\gamma(s)$ 的单位主法向量构成一条简单闭曲线 B. 证明: B 将球面分成面积相等的两个部分.

00443

实系数多项式 $p(x)$ 的模 1 范数定义为: @跟锦数学微信公众号

$$\|p\|_1 = \int_0^1 |p(x)|\, \mathrm{d}x.$$

(1) 求二次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \leqslant x^3$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 成立, 且 $\left\|x^3 - p(x)\right\|_1$ 达到最小;

(2) 求三次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \leqslant x^4$ 对任意 $x \in [0,1]$ 成立, 且 $\left\|x^4 - p(x)\right\|_1$ 达到最小.

00444

设 $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1\}$ 是单位圆盘, $f(z)$ 在 D 上解析, $f(0) = 0$, 且在 D 上有 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant 1$. 求证: 在 D 上有 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant \frac{2|z|}{1+|z|}.$$

00445

甲袋中有 $N-1$ $(N>1)$ 个白球和 1 个黑球, 乙袋中有 N 个白球, 每次从甲、乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中. 这样经过了 n 次, 求黑球出现在甲袋中的概率 p_n, 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

00446

微分方程 $y'' - (y')^3 = 0$ 的通解是 ____.

00447

设 $D: 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$I = \iint\limits_D (x+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-4)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

的值是 ____.

00448

设 $f(t)$ 二阶连续可导, 且 $f(t) \neq 0$, 若 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \\ y = f(t), \end{cases}$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} =$ ____.

00449

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值, $f(x)$ 为多项式, 则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值为 ____.

00450

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!\mathrm{e})]$ 的值为 ____.

00451

设 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数, 证明: 曲面 @跟锦数学微信公众号

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$$

的所有切平面都交于点 (a,b,c).

00452

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

00453

设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times p$ 矩阵, C 是 $p\times q$ 矩阵. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B)\leqslant\operatorname{rank}(ABC),$$

其中 $\operatorname{rank}(X)$ 表示矩阵 X 的秩.

00454

设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数.

(1) 若 $n\geqslant 2$, 计算 I_n+I_{n-2};

(2) 设 p 为实数, 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

00455

设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数, 设上半球面 @跟锦数学微信公众号

$$S: z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

方向朝上. 若对任何点 (x_0,y_0,z_0) 和 $r>0$, 第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

证明: $P_x'\equiv 0$.

00456

设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光线照射 S, 其中的部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ. 证明: Γ 落在一张过椭圆中心的平面上.

00457

设 n 为奇数, A,B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA=0$. 记 $A+J_A$ 的特征值集合为 S_1, $B+J_B$ 的特征值集合为 S_2, 其中 J_A,J_B 分别表示 A 和 B 的 Jordan 标准形. 求证: $0\in S_1\cup S_2$.

00458

设 $A_1,\cdots,A_{2017}$ 为 2016 阶方阵. 证明关于 $x_1,\cdots,x_{2017}$ 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$\det\left(x_1A_1+\cdots+x_{2017}A_{2017}\right)=0$$

至少有一组非零实数集, 其中 det 表示行列式.

00459

设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 中正连续函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

设 @跟锦数学微信公众号

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)}, n=1,2,\cdots.$$

求证: 数列 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$$

单调递增且收敛.

00460

设 $\alpha>1$. 求证不存在 $[0,+\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)\geqslant f^{\alpha}(x), x\in[0,+\infty).$$

00461

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调递增函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant f(x), g(x)\leqslant 1, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

求证: $\displaystyle\int_0^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}$.

00462

若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\underline{\qquad}.$$

00463

若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在, 则极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}=\underline{\qquad}.$$

00464

设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(\mathrm{e}^x y^2)$, 若 $z'_x=z$, 求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式.

00465

设 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0)=$ ____.

00466

曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行与平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为 ____.

00467

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1), 0<f'(x)<1$. 试证: 当 $a\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

00468

某物体所在的空间区域为 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z,$$

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量 @跟锦数学微信公众号

$$M=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

00469

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

00470

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

00471

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right).$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

00472

设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1\\\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=\underline{\qquad}.$$

00473

设 a 为实数, 关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$$

有虚根的充分必要条件是 a 满足 $\underline{\qquad}$.

00474

计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$(a>0$ 为常数), 其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=$ ____.

00475

记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall\ A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\bigcup\limits_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 $=$ ____.

00476

在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C. 问: C 为何种类型的曲线? 证明你的结论.

00477

设 n 阶方阵 A,B 满足: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(ABA)=\operatorname{rank}(B).$$

证明: AB 与 BA 相似.

00478

对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall\ m,k\geqslant 0$ 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty.$$

若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f}\in\mathscr{S}$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y,\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

00479

设 $n>1$ 为正整数. 令 @跟锦数学微信公众号

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

(1) 数列 $\{S_n\}$ 单调增且有界, 从而极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在.

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$.

00480

求证: 常微分方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$$

有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解.

00481

设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}=\underline{\quad\quad}.$$

00482

设 a 为实数, 关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$$

有虚根的充分必要条件是 a 满足 $\underline{\quad\quad}$.

00483

计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_S \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

($a>0$ 为常数), 其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=\underline{\quad\quad}$.

00484

记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall\ A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\bigcup\limits_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 $=$ ____.

00485

在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C. 问: C 为何种类型的曲线? 证明你的结论.

00486

设 n 阶方阵 A,B 满足: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(ABA)=\operatorname{rank}(B).$$

证明: AB 与 BA 相似.

00487

对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall\ m,k\geqslant 0$ 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^m\varphi^{(k)}(x)|<+\infty.$$

若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f}\in\mathscr{S}$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y,\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

00488

设 $(F,+,\cdot)$ 是特征为 p $(p\neq 0)$ 的域, 1 和 0 分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F,+)$ 到其乘法半群 $(\mathbb{F},\cdot)$ 的同态, 即 $\forall\ x,y\in F$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y).$$

证明: φ 要么将 F 的所有元映照为 0, 要么将 F 的所有元映照为 1.

00489

(1) 设 E 是三分 Cantor 集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

(2) 设 $E\subset[0,1]$, 证明: $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差的重要条件是 E 的边界点集是有限集.

00490

设 S 为三维欧氏空间中的一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上. 证明: S 是平面的一部分.

00491

考虑求解一阶常微分方程初值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

的 Runger-Kutta 法.

00492

设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 并且 $|f(z)|\leqslant M$ $(M>0)$, M 为常数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(0)|\leqslant M-\frac{|f(0)|^2}{M}.$$

00493

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机本变量序列, 且 @跟锦数学微信公众号

$$P(X_n=0)=P(X_n=a)=\frac{1}{2},$$

其中常数 $a>0$. 记 @跟锦数学微信公众号

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}.$$

求 Y_n 的特征函数, 并证明其分布收敛于区间 $[0,a]$ 上的均匀分布.

00494

过单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为 ____.

00495

设可微函数 $f(x,y)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_x'=-f, f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1, 且 \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\cot y},$$

则 $f(x,y)=$ ____.

00496

已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵, b 为 n 元列向量, 设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(B)=$ ____.

00497

$\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 ____.

00498

曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^2+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转生成的旋转曲面的面积为 ____.

00499

设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}.$$

00500

设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant f(x)\leqslant 1,\text{ 且 }\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

证明: 当 $0\leqslant x\leqslant 13$ 时, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 11,$$

并给出取等号的条件.

00501

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega=\left\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$$

上具有连续的二阶偏导数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

计算 $I=\displaystyle\iiint_{\Omega}\left(xf'_x+yf'_y+zf'_z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

00502

设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=A+B$. 证明: 若存在正整数 k, 使 $A^k=0$ (0 为零矩阵), 则行列式 $|B+2017A|=|B|$.

00503

设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

(1) 证明: 极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(2) 记 $\lim_{n\to\infty}a_n=C$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性.

00504

在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C. 求该平面 P 的法线与 z- 轴的夹角.

00505

设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1>1$. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$$

收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1}?

00506

设 $\Gamma=\{W_1,W_2,\cdots,W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即, $\forall\ M,N\in\Gamma$, 有 $MN\in\Gamma$), 证明: $\sum_{i=1}^{r}W_i=0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^{r}\operatorname{tr}(W_i)=0$, 其中 $\operatorname{tr}(W_i)$ 表示 W_i 的迹.

00507

给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 A (即, A 的转置 A^{T} 等于 $-A$), 记矩阵有序对集合 T 为

$$T=\left\{(X,Y);\ X\in\mathbb{R}^{n\times n},\ Y\in\mathbb{R}^{n\times n},\ XY=aI+A\right\},$$

其中 I 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合. 证明: 任取 T 中两元: (X,Y) 和 (M,N), 必有 $XN+Y^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\neq 0$.

00508

设 $f(x)=\arctan x$, A 为常数. 若 @跟锦数学微信公众号

$$B=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right]$$

存在, 求 A, B.

00509

设 $f(x)=1-x^2+x^3\ (x\in[0,1])$, 计算以下极限并说明理由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}.$$

00510

已知可导函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1,$$

则 $f(x)=$ ____.

00511

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ____.

00512

设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$u=x-cy, v=x+cy,$$

其中 c 为非零常数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}=\text{\_\_\_\_}.$$

00513

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6,$$

则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$____.

00514

不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=$____.

00515

记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V, 则三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_.$$

00516

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α, 定义一元函数 @跟锦数学微信公众号

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha),$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$, 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

00517

设 $\varGamma$ 为曲线 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_\varGamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z.$$

00518

设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

证明: $\forall\ a, b, a<b$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}.$$

00519

设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

00520

设实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}, n\geqslant 2,$$

其中 I 是与 H_n 通解的单位方阵, 则 $\operatorname{rank}(H_4)=$ ____.

00521

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}= \_\_\_\_.$$

00522

设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases}x=\pi\sin\dfrac{t}{2},\\ y=t-\sin t,\\ z=\sin 2t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. 则第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z= \_\_\_\_.$$

00523

设二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵 A 为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\ a&1&\cdots&a\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a&a&\cdots&1\end{pmatrix},$$

其中 $n>1,a\in\mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 ____.

00524

在空间直角坐标系下, 设有椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,a,b,c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0,y_0,z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ. 证明: 存在平面 Π, 使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

00525

设 A,B,C 均为 n 阶复方阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$AB-BA=C,AC=CA,BC=CB.$$

(1) 证明: C 是幂零方阵;

(2) 证明: A,B,C 同时相似于上三角阵;

(3) 若 $C\neq 0$, 求 n 的最小值.

00526

设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

00527

设 $\alpha\in(1,2),(1-x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{k=0}^\infty a_kx^k, n\times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵, I 为 n 阶单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$G(x)\equiv(g_{ij}(x)):=\sum_{k=0}^\infty a_k(xI+A)^k, 0\leqslant x<1.$$

试证对于 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 积分 $\displaystyle\int_0^1 g_{ij}(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在的充分必要条件是 $A^3=0$.

00528

有界连续函数 $g(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $1<g(t)<2$, $x(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 是方程 $x''(t)=g(t)x$ 的单调正解. 求证: 存在常数 $C_2>C_1>0$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$C_1x(t)<|x'(t)|<C_2x(t), t\in\mathbb{R}.$$

00529

设实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}, n\geqslant 2,$$

其中 I 是与 H_n 通解的单位方阵, 则 $\operatorname{rank}(H_4)=$ ____.

00530

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=\_\_\_\_.$$

00531

设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x=\pi\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t, \\ z=\sin 2t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. 则第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z=\underline{\qquad}.$$

00532

设二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵 A 为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

其中 $n>1, a\in\mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 $\underline{\qquad}$.

00533

在空间直角坐标系下, 设有椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0,y_0,z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ. 证明: 存在平面 Π, 使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

00534

设 A,B,C 均为 n 阶复方阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$AB-BA=C, AC=CA, BC=CB.$$

(1) 证明: C 是幂零方阵;

(2) 证明: A, B, C 同时相似于上三角阵;

(3) 若 $C \neq 0$, 求 n 的最小值.

00535

设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f'(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)| \,\mathrm{d}x.$$

00536

设 G 为群, 且满足: @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x, y \in G, (xy)^2 = (yx)^2.$$

证明: $\forall\ x, y \in G$, 元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过 2.

00537

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, $m(E) < \infty$. 设 $f, f_k \in L^2(E)$, 在 E 上几乎处处有 $f_k \to f$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_E |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(t) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

00538

已知椭圆柱面 S: @跟锦数学微信公众号

$$r(u, v) = \{a\cos u, b\sin u, v\}, -\pi \leqslant u \leqslant \pi, -\infty < v < +\infty.$$

(1) 求 S 上任意测地线的方程;

(2) 设 $a=b$. 取 @跟锦数学微信公众号

$$P=(a,0,0), Q=(a\cos u_0, b\sin u_0, v_0)\quad(-\pi<u_0<\pi, -\infty<v_0<+\infty).$$

写出 S 上连接 P,Q 两点的最短曲线的方程.

00539

推导求解线性方程组的共轭梯度法的计算格式, 并证明该格式经有限步迭代后收敛.

00540

设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 在其边界上连续. 若在 $|z|=1$ 上 $|f(z)|=1$. 证明 $f(z)$ 为有理函数.

00541

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量, 其有共同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$. 现对随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_nj$ 按大小顺序重新排列为 $X_{n_1}\leqslant X_{n2}\leqslant\cdots\leqslant X_{nn}$.

(1) 求随机变量 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合概率密度函数 $f_{1n}(x,y)$;

(2) 如果 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 求随机变量 $U=X_{nn}+X_{n1}$ 的密度函数 $f_U(u)$.

00542

极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=$ ____.

00543

设平面过原点和点 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 则此平面方程为 ____.

00544

设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y,$$

及 $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$ ____.

00545

满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 @跟锦数学微信公众号

$$u(t)=\underline{\qquad}.$$

00546

设 a,b,c,d 是互不相同的正实数, x,y,z,w 是实数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$a^x=bcd,b^y=cda,c^z=dab,d^w=abc,$$

则行列式 $\begin{vmatrix}-x&1&1&1\\1&-y&1&1\\1&1&-z&1\\1&1&1&-w\end{vmatrix}=$ ____.

00547

设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且存在两两互异的点 @跟锦数学微信公众号

$$x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1),$$

使得 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta,$$

证明: 对任意 $\lambda\in(\alpha,\beta)$, 存在互异的点 $x_5,x_6\in(0,1)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}.$$

00548

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$, 证明: 在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3\\&=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).\end{aligned}$$

00549

求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right].$$

00550

设 @跟锦数学微信公众号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$H(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1},n\geqslant 2.$$

(1) 证明: 对任一非零 $x\in\mathbb{R}^n, H(x)>0$;

(2) 求 $H(x)$ 满足条件 $x_n=1$ 的最小值.

00551

设函数 $f(x,y)$ 在区域 @跟锦数学微信公众号

$$D=\left\{(x,y);x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$$

上具有一阶连续偏导数, 且满足 $f(x,y)|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$, 以及 @跟锦数学微信公众号

$$\max_{(x,y)\in D}\left[f_x'^2+f_y'^2\right]=a^2,$$

其中 $a>0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4.$$

00552

设 $0<a_n<1, n=1,2,\cdots$, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ (有限或 $+\infty$).

(1) 证明: 当 $q>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(2) 讨论 $q=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性并阐述理由.

00553

在空间直角坐标系下, 设马鞍面 S 的方程为 $x^2-y^2=2z$. 设 σ 为平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, 其中 α,β,γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使通过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ.

00554

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实方阵, 满足

(1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$;

(2) 对每个 i $(i=1,\cdots,n)$, 有 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a$.

求 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的规范形.

00555

元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A, B 皆为整矩阵.

(1) 证明以下两条等价:

(i) A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵;

(ii) A 的行列式的绝对值为 1.

(2) 若又知 @跟锦数学微信公众号

$$A, A-2B, A-4B, \cdots, A-2nB, A-2(n+1)B, \cdots, A-2(n+n)B$$

皆可逆, 且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵. 证明: $A+B$ 可逆.

00556

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0\ (\forall\ n \geqslant 0)$, 且存在常数 $C>0$ 使得 $|xf'(x)| \leqslant C|f(x)|,\ \forall\ x \in [0,1]$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0\ (\forall\ n \geqslant 0)$;

(2) 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$.

00557

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0\ (n \geqslant 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n \ln n}+b_n,\ \ n \geqslant 2.$$

求证:

(1) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n\ (n \geqslant 2)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

00558

设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha}$, 其中 $\alpha\in(0,1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

00559

设 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=$____.

00560

若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ \mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为____.

00561

$$\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=\underline{\qquad}.$$

00562

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\underline{\qquad}.$$

00563

设函数 $f(t)$ 在 $t\neq0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f(x^2-y^2)$, 使得曲线 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L[y(2-f(x^2-y^2))]\,\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线.

00564

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}.$$

00565

计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是由 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9, z \geqslant 0$$

所围成的空心立体.

00566

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leqslant M,$$

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

00567

证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

00568

已知 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是正项级数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$b_{k+1}-b_k \geqslant \delta > 0,\ \ k=1,2,\cdots,$$

δ 为一正常数. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$

收敛.

00569

设 A 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有 @跟锦数学微信公众号

$$A = \underline{\qquad}.$$

00570

设 $y(x) \in C^1[0,1)$ 满足 $y(x) \in [0,\pi]$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$x = \begin{cases} \dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0,\pi], \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

则 $y'(0) = \underline{\qquad}$.

00571

设 $f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad}.$$

00572

设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为 $\underline{\qquad}$.

00573

给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别于 l_1,l_2 共面, 且与平面 $z=0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程;

(2) 确定 S 是什么曲面.

00574

证明:任意 n 阶实方阵 A 可以分解成

$$A=A_0+A_1+A_2,$$

其中 $A_0=aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

00575

设 $\alpha>0, f(x)\in C^1[0,1]$, 且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得

$$|x^\alpha f'(x)|\leqslant C|f(x)|\ \ (\forall\ x\in[0,1])\,.$$

证明:

(1) 若 $\alpha=1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

(2) 若 $\alpha>1$, 举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$ 可以不成立.

00576

设 $c\in(0,1), x_1\in(0,1)$ 且

$$x_1\neq c(1-x_1^2), x_{n+1}=c(1-x_n^2)\ \ (n\geqslant 1)\,.$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $c\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

00577

已知 $a(x), b(x), c(x) \in C(\mathbb{R})$, 方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

只有有限个 2π 周期解. 求它的 2π 周期解个数的最大值.

00578

设 A 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有 @跟锦数学微信公众号

$$A = \underline{\qquad}.$$

00579

设 $y(x) \in C^1[0,1)$ 满足 $y(x) \in [0,\pi]$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$x = \begin{cases} \dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0,\pi], \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

则 $y'(0) = \underline{\qquad}$.

00580

设 $f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad}.$$

00581

设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为 $\underline{\qquad}$.

00582

给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别于 l_1,l_2 共面, 且与平面 $z=0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程;

(2) 确定 S 是什么曲面.

00583

证明:任意 n 阶实方阵 A 可以分解成

$$A=A_0+A_1+A_2,$$

其中 $A_0=aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

00584

设 $\alpha>0, f(x)\in C^1[0,1]$, 且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得

$$|x^\alpha f'(x)|\leqslant C|f(x)|\ \ (\forall\ x\in[0,1])\,.$$

证明:

(1) 若 $\alpha=1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

(2) 若 $\alpha>1$, 举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$ 可以不成立.

00585

设 $(R,+,\cdot)$ 为含 $1\neq 0$ 的结合环, $a,b\in R$. 若 $a+b=ba$, 且关于 x 的方程

$$\begin{cases}x^2-(ax^2+x^2a)+ax^2a=1,\\ x+a-(ax+xa)+axa=1\end{cases}$$

在 R 中有解. 证明: $ab=ba$.

00586

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测, 则 @跟锦数学微信公众号

$$G=\{(x,f(x))\,;x\in\mathbb{R}\}$$

是 2-维 Lebesgue 零测集.

00587

在空间直角坐标系中设椭圆抛物面 S 的方程为 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma(u,v)=\left(u,v,u^2+\frac{1}{2}v^2\right),\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

(1) 求 S 的所有脐点;

(2) 设 σ 为与脐点处切平面平行的平面, 它截 S 于曲线 C, 证明 C 是一个圆周.

00588

设 @跟锦数学微信公众号

$$\delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

是区间 $[a,b]$ 的一个剖分. 用 $S[a,b]$ 表说满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合: 对任意 $s(x)\in S[a,b]$,

(1) $s(x)|_{[x_i,x_{i+1}]}$ 是三次多项式, $i=0,1,\cdots,n-1$.

(2) $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导.

证明:

(1) 对区间 $[a,b]$ 上的任意实函数 $f(x)$, 存在唯一的 $s(x)\in S[a,b]$ 满足: @跟锦数学微信公众号

$$s(x_i)=f(x_i),i=0,1,\cdots,n,s''(a)=s''(b)=0.$$

(2) 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 则对满足 (1) 的函数 $s(x)$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b|s''(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

且等号成立当且仅当 $s(x)=f(x)$.

00589

设 z_0 是复函数 $w=f(z)$ 的 n 阶极点. 试证明: 一定存在 $\rho>0$ 及 $R>0$, 使得对任意 @跟锦数学微信公众号

$$w\in\{w\in\mathbb{C};|w|>R\},$$

函数 $f(z)-w$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 中必有 n 个零点.

00590

设独立随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$P\left(X_n=\pm n^\theta\right)=\frac{1}{2},$$

其中 $\theta>0$ 是常数. 记 @跟锦数学微信公众号

$$S_n=\sum_{i=1}^n X_i.$$

(1) 当 $\theta<\frac{1}{2}$ 时, 证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0, 即对任意 $\varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{|S_n|}{n}\geqslant\varepsilon\right)=0;$$

(2) 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\xrightarrow{D}N(0,1),$$

其中 $\mathrm{Var}(S_n)$ 表示 S_n 的方差, $\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛.

00591

设函数 @跟锦数学微信公众号

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2x}-b}{x^2}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续, 则 $a+b$ 的值为 ____.

00592

设 $a>0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x=$ ____.

00593

设曲线 L 是空间区域 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$$

的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的交线, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\oint_L (z^2-y^2) \mathrm{d}x+(x^2-z^2) \mathrm{d}y+(y^2-x^2) \mathrm{d}z\right|=\_\_\_\_.$$

00594

设函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $F(x-y, z)=0$ 确定, 其中 $F(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 则 $z_{xy}''=$ ____.

00595

已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^n\left(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2,$$

而 f 的规范形为 ____.

00596

设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1;$$

又设数列 $\{a_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$a_1 \in(0,1), a_{n+1}=f(a_n) \quad (n=1,2, \cdots),$$

严格单调减少且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n=0$. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$.

00597

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant 1, f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty).$$

证明: 对于 $0<\alpha<\beta$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0.$$

00598

计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 $\Omega: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$.

00599

求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$ 之和.

00600

设 A 是 n 阶幂零矩阵, 即满足 $A^2=0$. 证明: 若 A 的秩为 r, 且 $1\leqslant r<\dfrac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&I_r&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵.

00601

设 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 问单调递减的正实数列, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为一实数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_nu_n$ 收敛, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$$

00602

空间中有两个圆球面 B_1 和 B_2, B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D. 设 B 是含在 D 中的一个圆球, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

(1) (4 分) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面;

(2) (2 分) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点.

证明你的论断.

00603

设 $\alpha>0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0)=0$, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\xi f''(\xi)+(\alpha+1)f'(\xi)>\alpha f(\xi).$$

00604

设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 $I-\bar{A}A$ 的特征多项式, 其中 $\bar{A}$ 表示 A 的共轭方阵. 证明: $p(x)$ 必为实系数多项式.

00605

已知 f_1 为实 n 元正定二次型. 令

$$V=\{f;\ f\text{ 为实 }n\text{ 元二次型, 满足:对任何实数 }k\text{ 有 }kf+f_1\text{ 属于恒号二次型}\}.$$

这里恒号二次型为 0 二次型, 正定二次型及负定二次型的总称. 证明: V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并求出这个向量空间的维数.

00606

设 $\delta>0$, $\alpha\in(0,1)$, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=x_n\left(1-\frac{h_n}{n^\alpha}\right)+\frac{1}{n^{\alpha+\delta}},\quad n\geqslant 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 是有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

00607

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

(1) 证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步证明当 $x,y\geqslant 0$ 时成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)+f(y)\leqslant f(0)+f(x+y).$$

(2) 设 $n\geqslant 3$, 试确定集合 @跟锦数学微信公众号

$$E=\left\{\sum_{k=1}^n f(x_k);\sum_{k=1}^n x_k=0,x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

00608

设 L_1 和 L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线, 点 B 是它们公垂线段的中点. 点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动, 使得 $A_1B\perp A_2B$. 证明直线 A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面.

00609

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2019})}.$$

00610

设数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_1>0,\quad x_{n+1}=\ln(1+x_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

00611

设 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基, 令 @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}=0.$$

证明:

(1) 对 $i=1,2,\cdots,n+1$,

$$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n\}$$

都构成 V 的一组基;

(2) $\forall\ \alpha\in V$, 在 (1) 中点 $n+1$ 组基中, 闭存在一组基使得 α 在此基下的坐标分量均非负;

(3) 若

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$

且 $|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同, 则在 (1) 中的 $n+1$ 组基中, 满足 (2) 中非负坐标表示的基是唯一的.

00612

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 若 $A^2=I_n$ (I_n 表示单位矩阵), 则称 A 为对合矩阵. 试证:

(1) 若 A 是 n 阶对合矩阵, 则

$$\mathrm{r}\left(I_n+A\right)+\mathrm{r}\left(I_n-A\right)=n;$$

(2) n 阶对合矩阵 A 一定可以对角化, 其相似对角形为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix},$$

其中 $r=\mathrm{r}\left(I_n+A\right)$.

(3) 若 A,B 均是 n 阶对合矩阵, 且 $AB=BA$, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

00613

设函数 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续凹函数, 满足 $f(a)=0,f(b)>0$ 且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处存在非零的右导数. 对 $n\geqslant 2$, 记

$$S_n=\left\{\sum_{i=1}^n kx_k;\sum_{k=1}^n kf(x_k)=f(b),x_k\in[a,b]\right\}.$$

(1) 证明对 $\forall\ \alpha\in(0,f(b))$, 存在唯一 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)=\alpha$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup S_n-\inf S_n)$.

00614

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$ 收敛, 其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

00615

@跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=\underline{\qquad}.$$

00616

设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\underline{\qquad}.$$

00617

定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\underline{\qquad}.$$

00618

已知 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x2-2xy+3y^2},$$

则 $u(x,y)=\underline{\qquad}$.

00619

设 $a, b, c, \mu > 0$, 曲面 $xyz = \mu$ 与曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相切, 则 $\mu =$ ____.

00620

计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xy$ 围成的区域在第一卦限的部分.

00621

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 且存在常数 $A > 0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$$

在 $[0, +\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0, +\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

00622

计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi - \sin\phi)} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta.$$

00623

设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

证明: $c_n > 0$, $(n \geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

00624

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

00625

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

00626

计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt[x]{x}-1)}{\ln x}$.

00627

设函数 $f(x)$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上连续且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=3x+\int_0^x(t-x)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $f^{(2019)}(0)$ 的值.

00628

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$.

00629

计算反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$.

00630

求由方程 $xyz^3+x^2+y^3-z=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

00631

设 $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$. (1) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y),\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$.

00632

(2) 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在?

00633

设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,m$, 其中 m 为正整数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

00634

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x\in[0,1]$ 都有 $f(x)\in[0,1]$, 求证存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $f(x_0)=x_0$.

00635

设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2},n=1,2,\cdots$. 讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上是否一致收敛? 说明理由.

00636

设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)^2\int_a^b[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

00637

确定实数 a,b 的值使积分 @跟锦数学微信公众号

$$F(a,b)=\int_0^1\left(ax+b-\frac{1}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

达到最小值.

00638

确定幂级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

的收敛域.

00639

选取 a, b, 使表达式 @跟锦数学微信公众号

$$\left[(x+y+1)\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}x+\left[b\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y\right]\mathrm{d}y$$

为某一函数的全微分, 并求出这个函数.

00640

计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

其中 S 是由曲面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1, y=2$ 所围立体表面的外侧.

00641

求 a, b, 使得多项式 $x^4-4ax+b$ 有重因式.

00642

计算 n 级行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n+1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

00643

问 a,b 取何值时, 线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + ax_2 + 4x_3 = b \end{cases}$$

有解? 有唯一解? 有无穷解? 当有解时, 求出全部解.

00644

令 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

是一个 n 级矩阵, 计算 $A^2, A^3, \cdots, A^{n-1}$.

00645

设 A,B 都是 n 级矩阵, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

00646

设 A 是 n 级正定实矩阵, 证明: 当 $n>1$ 时, 伴随矩阵 A^* 是正定矩阵.

00647

设 V 是定义域为实数集 $\mathbb{R}$ 的一元实函数组成的集合, 对 $f, g \in V, \alpha \in \mathbb{R}$, 分别用下列式子定义 $f+g, \alpha f$:

$$
\begin{gathered}
(f+g)(x)=f(x)+g(x), \\
(\alpha f)(x)=\alpha f(x).
\end{gathered}
$$

(1) 证明 V 是数域上的线性空间.

00648

(2) 设

$$
f_0(x)=1, f_1(x)=\cos x, f_2(x)=\cos 2 x, f_3(x)=\cos 3 x .
$$

判断 f_0, f_1, f_2, f_3 是否线性相关.

00649

(3) 用 $L(f, g)$ 表示由 f, g 生成的子空间, 判断 $L\left(f_0, f_1\right)+L\left(f_2, f_3\right)$ 是否为直和.

00650

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上 3 维线性空间, V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$
A=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0
\end{pmatrix} .
$$

求 σ 的特征值和特征向量. 又问: σ 可否对角化? 若可对角化, 求 C 使得 $C^{-1} A C$ 成对角形.

00651

设 V 是一个欧氏空间, $\alpha \in V$ 是一个非零向量. 对于 $\xi \in V$, 规定

$$\tau(\xi)=\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示内积. 证明: (1) τ 是 V 的一个正交变换, 且 $\tau^2=\mathscr{E}$, 其中 $\mathscr{E}$ 是单位变换.

00652

(2) 当 V 是一个 n 维欧氏空间时, 证明: 存在 V 的一个标准正交基, 使得 τ 关于这组基的矩阵有形状:

$$\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

00653

(3) 在 3 维欧氏空间里说明线性变换 τ 的几何意义.

00654

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^{\frac{1}{n}}$.

00655

计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的区域.

00656

计算 $\oiint\limits_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+zx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是单位圆周 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

00657

设 $f(x,y)$ 是在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$M=\max_{x\in D}|f(x,y)|,\quad m=\min_{x\in D}|f(x,y)|.$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\iint\limits_D|f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}$.

00658

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, 证明以下结论:

(1) $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$;

(2) $a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant a_{n-2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

00659

研究函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性, 一致连续性与可微性.

00660

证明 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

00661

设 $\{a_n\}$ 有界并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

00662

求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+ze^z=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ 在 $(1,-1,0)$ 处的切线方程.

00663

证明: 不存在从闭区间 $[0,1]$ 到单位圆周上的一对一的连续对应.

00664

设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, $a\in\mathbb{P}$, $(x-a)\mid f(x^n)$. 证明: $(x^n-a^n)\mid f(x^n)$.

00665

计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+a_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2+a_2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2+a_n \end{vmatrix},\ (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n).$$

00666

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\alpha_{n-r+1}$ 是 n 元非齐次线性方程组 $AX=B$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量, 且 $\operatorname{rank}(A)=r$. 问 $\alpha_1-\alpha_{n-r+1},\cdots,\alpha_{n-r}-\alpha_{n-r+1}$ 是否为导出组 $AX=0$ 的一个基础解系, 并说明理由.

00667

设 A 是 $n\times(n+1)$ 矩阵, E_n 是 n 阶单位矩阵, 证明: 存在 $(n+1)\times n$ 矩阵 B 使得 $AB=E_n$ 的充要条件是 A 的秩为 n.

00668

证明: n 阶实矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件是存在一个正定矩阵 B 使得

$A = B^2$.

00669

令 @跟锦数学微信公众号

$$V = \{f(x); f(x)\text{ 是实系数多项式且 } f(1) = 0, \partial(f(x)) \leqslant n\}.$$

证明: V 是实数域上线性空间, 并求 V 的一组基.

00670

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, V_1 是 V 的非零子空间, 如果存在唯一的子空间 V_2 使得 $V = V_1 \oplus V_2$, 证明: $V_1 = V$.

00671

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = E$, 证明: 存在正交阵 T 使得 @跟锦数学微信公众号

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix},$$

其中 T^{T} 是 T 的转置.

00672

设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, 对于线性空间 $\mathbb{P}^n$ 上的线性变换 σ: @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(x_1, \cdots, x_n) = (0, x_2, \cdots, x_n).$$

证明: $\sigma^2 = \sigma$, 并求 σ 的核.

00673

设 σ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 且 σ 在某组基下的矩阵为对角矩阵, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 σ 的全部不同的特征值. 证明:存在 V 的线性变换 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma = \lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_r\sigma_r, \quad \mathscr{E} = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r,$$

其中 $\mathscr{E}$ 为恒等变换.

00674

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$.

00675

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[2020]{x^{2020}+x^{2019}}-\sqrt[2020]{x^{2020}-x^{2019}}\right)$.

00676

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t-\mathrm{e}\right]\mathrm{d}t}{\ln x}$.

00677

求积分 $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

00678

用三重积分求椭球体 @跟锦数学微信公众号

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,a,b,c>0\right\}$$

的体积.

00679

求幂级数 $-x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数.

00680

已知一元函数 $f(h)$ 在 h_0 点可导, 设 @跟锦数学微信公众号

$$g(x,y)=\frac{f(h_0+x)-f(h_0-y)}{x+y}$$

为定义在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元函数, 其中 D 为 $\mathbb{R}^2$ 的第一象限. 用 $\varepsilon-\delta$ 定义求 g 在 D 上当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限.

00681

用含参量积分计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

00682

设 $k \in \mathbb{R}$, 试问 k 为何值时, 方程 $\arctan x - kx = 0$ 无正实根.

00683

已知函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^m y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ a, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

其中 m 为正整数, a 为实数. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的方向导数的个数为 n, 试讨论 n 与 m 和 a 的关系.

00684

证明: 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

00685

证明: 第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

在区域 $D: x>0$ 上与路径无关.

00686

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)+f(1)+f(2)=3, f(0)\neq 1, f(3)=1,$$

证明: 存在 $\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

00687

证明: 对 $x \geqslant 0$, 函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$$

有一个上界 $\dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)}$.

00688

非极值点的稳定点称为鞍点. 证明: 二元函数 $f(x,y)=x+y\sin x$ 的全体鞍点组成的集合与整数集 $\mathbb{Z}$ 可建立一一映射.

00689

证明: 如果 $x^2+x+1 \mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 则 $(x-1)\mid f_1(x), (x-1)\mid f_2(x)$.

00690

计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

00691

求下列线性方程组的全部解, 并写出对应齐次方程组的基础解系 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=2 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=8 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=9 \end{cases}.$$

00692

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

00693

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 证明:$\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

00694

设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当存在矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定.

00695

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角形.

00696

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&4&2\\3&-6&-3\end{pmatrix}$ 的初等因子与若尔当典范形.

00697

记 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{V}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C}, a+d=0\right\},$$

对任一 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{V}$, 定义 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换 $\mathscr{T}$ 为:对任意 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{V}$, $\mathscr{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$. 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 试求: $\mathscr{T}$ 的所有特征值以及这些特征值相对应的特征向量.

00698

设 A,B 是 $n\times n$ 矩阵, 且 $A^2=B^2=E$ (E 是 n 阶单位矩阵), 且 $|A|+|B|=0$. 证明: $A+B$ 不是可逆矩阵.

00699

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\left(\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

00700

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

00701

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对 $\forall\ x\in[a,b]$, 有 $f(x)>0$, 则 $\exists\ r>0,\forall\ x\in[a,b]$, 都有 $f(x)>r$.

00702

若函数 $f(x)$ 可导, 则其导函数 $f'(x)$ 不存在第二类间断点.

00703

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

00704

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

证明: 在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

00705

若 E 是非空有上界实数集. 设 $\sup E=a$, 且 $a\notin E$. 证明: 存在数列 $\{x_n\}, x_n\in E$, 使得 $x_n<x_{n+1}, n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

00706

设 $f(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t$. 证明:

(1) $f(x)$ 满足微分方程 $f'(x)+2xf(x)=0$;

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

00707

设函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

回答下列问题:

(1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续? 为什么?

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 为什么?

00708

若函数列 $\{g_n(x)\}$ 满足下列条件:

(1) $g_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x=1$;

(2) $\forall\ c\in(0,1), \{g_n(x)\}$ 在 $[-1,-c]$ 与 $[c,1]$ 上一致收敛于 0.

证明: 对 $[-1,1]$ 上任意连续函数 $f(x)$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x=f(0).$$

00709

设 $\{a_n\}$ 是正的单调增加数列, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 有界.

00710

计算封闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围立体的体积.

00711

若多项式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 3 , 除以 $x-3$ 的余式为 4, 则 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的余式为 ____.

00712

设四阶行列式 D_4 的第三行元素为 $-1,0,2,3$, 第四行元素对应的余子式分别为 $5,10,a,5$, 则 $a=$ ____.

00713

设 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 都为四维行向量, 四阶矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\\gamma_3\\3\gamma_4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\\2\gamma_4\end{pmatrix},$$

且行列式 $|A|=2,|B|=1$, 则行列式 $|2A-B|=$ ____ .

00714

若实对称矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ 合同, 则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的正惯性指数为 ____ .

00715

t 满足 ____ 时, 二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-t)x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$$

是正定的.

00716

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是 3 维向量空间的两组基, 若向量 γ 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 与 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_1+x_2,\quad y_3=x_1+x_2+x_3,$$

则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 ____ .

00717

已知 $\mathbb{P}$ 是数域, 向量空间 $\mathbb{P}^3$ 上的线性变换 σ 为: 对 $\forall\ (a,b,c)\in\mathbb{P}^3$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c),$$

则线性变换 σ 的秩为 ____ .

00718

在二维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中定义内积如下: 对 $\forall\ X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\forall\ Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$(X,Y)=3x_1y_1+x_2y_2.$$

则向量 $\alpha=(1,1),\beta=(0,2)$ 的夹角余弦 $\cos\left\langle\widehat{\alpha,\beta}\right\rangle=$ ____.

00719

设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-(2n-1))+1,$$

其中 n 为大于 1 的非负整数. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

00720

设 A 为 n 阶方阵, 证明:

(1) (10 分) 若 k 是正整数, α 是 $A^{k+1}X=0$ 的解, α 不是 $A^kX=0$ 的解, 则 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^k\alpha$ 线性无关;

(2) (5 分) 当正整数 $k \geqslant n$ 时, 必有 $\operatorname{rank}\left(A^{k+1}\right)=\operatorname{rank}\left(A^k\right)$.

00721

设矩阵 A 的伴随矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$.

(1) (5 分) 计算行列式 $|A|$;

(2) (10 分) 求矩阵 B.

00722

已知矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b & 2 & 0 \\ a_2 & b_1 & c & 2 \end{pmatrix}$$

与对角矩阵相似. 问: a, a_1, a_2, b, b_1, c 满足什么条件?

00723

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) (9 分) 求出 A 的特征矩阵的等价标准形;

(2) (9 分) 写出 A 的不变因子, 行列式因子, 初等因子;

(3) (6 分) 写出 A 的特征多项式和极小多项式;

(4) (6 分) 写出 A 的有理标准型和若尔当标准形.

00724

设 $\mathscr{F}$ 是 n 维欧几里得空间 V 的对称变换. 证明: $\mathscr{F}$ 的像子空间 $\operatorname{im}\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 的核子空间 $\ker\mathscr{F}$ 的正交补.

00725

求: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+n^3}}{1+2+\cdots+n}$.

00726

$$\frac{\mathrm{d}^{2020}\left[\mathrm{e}^{2019x}\sin(2018x+2017)\right]}{\mathrm{d}x^{2020}}.$$

00727

设 $x_n=\cos^n\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$.

00728

求 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7},\cdots$$

的聚点.

00729

若 $f(x)$ 的图像关于 $x=a,x=b$, $a\neq b$ 对称, 证明: $f(x)$ 是周期函数.

00730

求 $\lim\limits_{x\to 2020}\dfrac{2020^x-x^{2020}}{x-2020}$.

00731

讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 的一致连续性.

00732

求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上过点 $(0,b)$ 的最大弦长.

00733

求 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

00734

求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

00735

求曲面 $xyz=1$ 在其上点 (x_0,y_0,z_0) 处切平面与坐标平面所围几何体体积.

00736

求 $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}y}{(\ln y)^{2x}}$ 的定义域.

00737

求 $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=1} xy^2\,\mathrm{d}y-yx^2\,\mathrm{d}x$.

00738

设 $f(x), g(x), h(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的多项式. 证明: $f(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 互素的充分必要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$(f(x), h(x)) = (f(x), g(x)) = 1.$$

00739

设 m 是整数. 证明: $x^4 - mx^2 + 1$ 在有理数域上可约的充分必要条件是存在正数 k 使得 $m = k^2 - 2$ 或 $m = k^2 + 2$.

00740

设 a, b 是两个不同的实数, 计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ab & a+b \end{vmatrix}.$$

00741

设 γ_0 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ (β 为非零向量) 的一个解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是其导出组 $AX = 0$ 的一个基础解系. 证明:

(1) $\gamma_0, \beta_1 = \gamma_0 - \eta_1, \beta_2 = \gamma_0 - \eta_2, \cdots, \beta_t = \gamma_0 - \eta_t$ 是线性方程组 $AX = \beta$ 的一组线性无关的解;

(2) 线性方程组 $AX = \beta$ 的任一解都可以表示为 @跟锦数学微信公众号

$$k_0\gamma + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t,$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1 - k_0$.

00742

设 A 为 n 阶方阵, $n \geqslant 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵. 证明:

(1) 若 $|A| = 0$, 则 $\operatorname{rank}(A^*) \leqslant 1$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$, 且 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

00743

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 V 的一组基, f 是 V 的一个线性变换, 且

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_3, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_4, f(\varepsilon_3) = f(\varepsilon_4) = 0.$$

(1) 写出 f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵;

(2) 求出 f 的值域 $f(V)$ 的维数及一组基;

(3) 判断 $f(V) \cup f^{-1}(0)$ 是否为 V 的一个线性子空间? 并说明理由.

00744

设 A 是 3 阶实对称矩阵, 行列式 $|A - 3E| = 0$, 向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵;

(2) 求矩阵 A 及行列式 $|(A + A^* - 2E)^{1010}|$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位阵.

00745

设 A, C 是 n 阶正定矩阵, 实矩阵 B 是矩阵方程 $AX + XA = C$ 的唯一解. 证明:

(1) B 是正定矩阵;

(2) 存在 n 个线性无关的 n 维行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使得

$$B=\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2+\cdots+\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n,$$

其中 α_i^{T} 表示 α_i 的转置, $i=1,\cdots,n$.

00746

设 J 为一个 k 级若尔当 (Jordan) 块. 证明:

(1) 存在 k 级幂零矩阵 P (即存在正整数 s, 使得 $P^s=0$) 及对角矩阵 U, 使得 $J=P+U$;

(2) 任一 n 阶复方阵 A 都可以分解称为 $A=B+C$, 其中 B 是幂零矩阵, C 相似于对角矩阵, 且 $BC=CB$.

00747

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

00748

函数在区间 $[0,1)$ 连续, 则该函数在 $[0,1)$ 上一致连续.

00749

如果函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可微.

00750

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

00751

有界闭区间上连续函数一定一致连续.

00752

请叙述数列的单调有界定理.

00753

请用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 处不连续.

00754

计算 $(\cos^2 x)^{(2019)}$, 其中 2019 表示 2019 次导数.

00755

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域以及在收敛域内求这个级数的和.

00756

请用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,\mathrm{d}x=0$.

00757

设 $0<b\leqslant a$, 证明:

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}.$$

00758

设 $f(x)$ 是定义在实数域上的可导正函数, 并且 $f'(x)=2020f(x)$, $f(0)=1$, 求 $f(x)$.

00759

设 $f(x)$ 是定义在实数域上的压缩函数, 即, 对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足下列不等

式: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{1}{3}|x-y|.$$

设 $x_1=1, x_{n+1}=f(x_n), n \geqslant 2$. 证明:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 是一个柯西列.

(2) 存在唯一的 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $a=f(a)$.

00760

试就实数域和复数域两种情况, 求 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$$

的标准分解式.

00761

设矩阵 A, B 满足 $A^* B A=2 B A-8 E$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

A^* 是 A 的伴随矩阵, E 为单位矩阵, 求矩阵 B.

00762

已知矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b\end{pmatrix},$$

问 a, b 为何值时, A 与 B 相似, 并求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1} A P=B$.

00763

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ a & \varepsilon & 0 \\ b & c & \varepsilon^2\end{pmatrix}$, 这里 a, b, c 是任意数, $\varepsilon=\dfrac{-1+\sqrt{3} \mathrm{i}}{2}$, 求 A^{1000}.

00764

设方阵 A 满足 $A^2+2A-3E=0$.

(1) 求证 $A+4E$ 可逆, 并求逆;

(2) 讨论 $A+nE$ 的可逆性.

00765

用正交变换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形 (要求写出正交变换的矩阵和相应的标准形).

00766

已知 $A=\begin{pmatrix}3&-4&6&-14\\1&-1&1&-5\\0&0&2&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的不变因子, 初等因子和最小多项式.

(2) 求 A 的若当标准形.

00767

设 V_1,V_2 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\forall\ (\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in V_1\times V_2$, $k\in\mathbb{P}$, 规定

$$(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2),k(\alpha_1,\alpha_2)=(k\alpha_1,k\alpha_2).$$

(1) 证明 $V_1\times V_2$ 关于上述运算构成数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间;

(2) 设 $\dim V_1=m,\dim V_2=n$, 求 $\dim(V_1\times V_2)$.

00768

设 A 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵, 其特征多项式为 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=(x-a)^{n-1}(x-b),$$

这里 $a\neq b$. 假设 A 的任意三个特征向量都是线性相关的. 对于 $\lambda\in\mathbb{C}$, 以及正整数 l, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$V_{\lambda,l}=\left\{\alpha\in\mathbb{C}^n;(A-\lambda E_n)^l\alpha=0\right\}$$

是 $\mathbb{C}$ 上线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的 A 的不变子空间, 并求 $\mathbb{C}$ 上线性空间 $V_{\lambda,l}$ 的维数.

00769

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)=$ ____.

00770

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=\sin at\\ y=\cos bt\end{cases}$ 所确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ ____.

00771

曲面 $\sin(x+z)-y(z+2)+\mathrm{e}^{xy}=1$ 在点 $(-1,0,1)$ 处的切平面方程是 ____.

00772

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\cos x}{x}$, 则 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=$ ____.

00773

积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^1\dfrac{y\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=$ ____.

00774

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是 ____.

00775

设 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u=x+cy, v=x-cy$, 其中 c 为非零常数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= \_\_\_\_.$$

00776

极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$ ____.

00777

求不定积分 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+1}$;

00778

求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^3(\mathrm{e}^x-1)}$;

00779

计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 及 $z=9$ 所围成的闭区域;

00780

设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n\to\infty}a_n$;

00781

计算曲线积分 $\oint_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 $L: x^2+y^2=1$ 取逆时针方向;

00782

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

00783

设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 证明: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

00784

设 $u_n \neq 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 是条件收敛.

00785

多项式 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 和 $g(x) = x^4 + x^2 + 1$ 的最大公因式是 ____.

00786

行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$ 的值为 ____.

00787

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A^2 - 2A + E$, 则 $B^{-1} =$ ____.

00788

设矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&6&7\\8&9&4\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{2019}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{2020}=$ ____.

00789

在 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $(1,1,1)$ 和 $(0,1,1)$ 正交的单位向量是 ____.

00790

矩阵 $\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值为 ____.

00791

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ 的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=$ ____.

00792

已知方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}t&2&2\\2&t&2\\2&2&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$$

有无穷多组解, 则 $t=$ ____.

00793

若行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12}=-1$, 则 $A_{13}=$ ____.

A. -11 B. 0 C. 2 D. 3

00794

n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s(3 \leqslant s \leqslant n)$ 线性无关的充要条件是 ____.

A. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关;

B. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能由其余向量线性表示;

C. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示;

D. 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

00795

已知齐次线性方程 $AX=0$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, A=\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0,$$

则 ____.

A. 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i+b \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程只有零解;

B. 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i+b \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程只有非零解;

C. 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i+b=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程只有零解;

D. 当 $\sum_{i=1}^{n} a_i+b=0$ 且 $b=0$ 时, 方程只有零解.

00796

设 A, B 是四阶方阵, $\operatorname{rank}(A)=3, \operatorname{rank}(B)=4$, 它们的伴随矩阵是 A^*, B^*,

则 $\mathrm{rank}\,(A^*B^*)=$ ____.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

00797

设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 则 ____.

A. 当 $m>n$ 时, 方阵 AB 可逆;

B. 当 $m>n$ 时, 方阵 AB 不可逆;

C. 当 $m=n$ 时, 方阵 AB 不可逆;

D. 当 $m<n$ 时, 方阵 AB 不可逆.

00798

已知二阶实对称矩阵 A 的一个特征向量是 $(-3,1)^{\mathrm{T}}$, 且 $|A|<0$, 则下面向量中必为 A 的特征向量的是 ____.

A. $c(-3,1)^{\mathrm{T}},c\neq 0$

B. $c(1,3)^{\mathrm{T}},c\neq 0$

C. $c_1(1,3)^{\mathrm{T}}+c_2(-3,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\neq 0$

D. $c_1(1,3)^{\mathrm{T}}+c_2(-3,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2$ 有一个为零, 但不同时为零

00799

矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充要条件是 ____.

A. $a=0,b=2$

B. $a=0,b$ 为任意实数

C. $a=0,b=0$

D. $a=2,b$ 为任意实数

00800

计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

00801

判断两个向量 @跟锦数学微信公众号

$$\beta_1 = (4,3,-1,11), \quad \beta_2 = (4,3,0,11)$$

是否为向量组 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1 = (1,2,-1,5), \quad \alpha_2 = (2,-1,1,1)$$

的线性组合, 若是, 请写出表达式.

00802

设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B, (A+B)^2 = A+B$, 证明: 矩阵 AB 是零矩阵.

00803

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间的一组基, 求由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵.

00804

对于线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} \tau x_1 + x_2 + x_3 = \tau - 3 \\ x_1 + \tau x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \tau x_3 = -2 \end{cases},$$

讨论 τ 为何值时, 方程组无解, 有唯一解, 有无穷多解; 在无穷多组解时给出通解.

00805

设 n 阶可逆方阵 A 的各行元素之和为 m, 证明或求解:

(1) $m \neq 0$; (4 分)

(2) A^{-1} 各行元素之和为 $\frac{1}{m}$; (4 分)

(3) 求 $2A^{-1} - 5A$ 的各行元素之和. (5 分)

00806

已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式; (2 分)

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵. (12 分)

00807

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n^3}$.

00808

计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

00809

设函数 $f(x)=\begin{cases}x^5\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 计算 f 在 $x=0$ 处的二阶导数 $f''(0)$.

00810

求不定积分 $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

00811

设 $x_n=\int_0^1\sqrt{t^{2n}-t^{2n+2}}\,\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots$. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

00812

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 确定的隐函数, 求 $\mathrm{d}z$.

00813

设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

(1) 计算累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$.

(2) 讨论重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在?

00814

证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_m\sqrt{n+m}\right)=0,$$

其中 $a_0+a_1+\cdots+a_m=0$.

00815

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$. 求证存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

00816

设 @跟锦数学微信公众号

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

00817

设无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $xf(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减, 求证: $f(x)\geqslant 0, x\in[1,+\infty)$.

00818

确定实数 a,b 的值使积分 $F(a,b)=\int_0^1(ax+b-x^2)^2\,\mathrm{d}x$ 达到最小值.

00819

确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的收敛域, 并求其和函数.

00820

设连续函数 $f(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$. 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant 2\pi,$$

其中 $L: x^2+y^2=1$ 并取逆时针方向.

00821

计算曲面积分 $\iint\limits_S (xy+yz+xz)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

00822

计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)\right].$$

00823

计算极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$.

00824

设 $y=\dfrac{(x+2)^2(x-4)^4}{(x+3)^3(x-5)^5}$, 其中 $x>5$, 求 y'.

00825

计算不定积分 $\int \mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

00826

设 $F(x)=\displaystyle\int_1^{u(x)}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 其中 $u(x)=\displaystyle\int_0^x\cos^2 t\,\mathrm{d}t$, 求一阶导数 $F'(x)$.

00827

设 $z=2x^3+y^2$, 其中 $y=f(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2-2=0$ 所确定的隐函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

00828

设 $0<a_1<1$, $a_{n+1}=a_n(2-a_n)$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

00829

设函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续且 $f(2)=f(4)$. 证明: 存在 $a,b\in[2,4]$ 使得 $b-a=1$ 且 $f(a)=f(b)$.

00830

计算极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}\right).$$

00831

设 $P(x,y)$ 在 xy 平面上有连续偏导数, 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关, 且对任意的 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+3xy^2\,\mathrm{d}y,$$

请求解二元函数 $P(x,y)$.

00832

设函数 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 令

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[0,1],\ n=1,2,\cdots.$$

请证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

00833

证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

00834

计算曲面积分 $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的外侧.

00835

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n$ 的和函数, 并指其和函数的定义域.

00836

设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases},g(x)=x^2,\ -\infty<x<+\infty.$$

计算 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

00837

计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+2\sqrt{n}}\right).$$

00838

计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-x^3-1}{\sin^6 x}$.

00839

设 $g(0)=g'(0)=0$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

求 $f'(0)$.

00840

设 $P_3(x)=x^3+4x^2+5$, (1) 计算 $P_3(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒公式; (2) 计算积分 $\int\frac{P_3(x)}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$.

00841

设函数 $u=f(x+g(y))$, 其中 f,g 均二阶可导, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

00842

设 $x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n-1}}{2},\ n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

00843

设函数 f 在以 x_0 为内点的区间上有定义且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)]=0$, 请判断 x_0 点是否为函数 f 的连续点, 若是则证明, 否则举例说明.

00844

计算函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $36x^2+16y^2+9z^2=144$ 下的最大值和最小值.

00845

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且满足 $f(x)=\ln x-\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x$, 计算积分 $\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

00846

设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0,\delta)$ 内的偏导数 f_x,f_y 均有界, 证明函数 $f(x,y)$ 在 $U(P_0,\delta)$ 上连续.

00847

设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. (1) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛, 并求其和; (2) 若二阶导数 $f''(x)<0, x\in[1,+\infty)$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

00848

设 D 为两直线 $y=x, y=4x$ 和两双曲线 $xy=1, xy=4$ 所围区域, $F(u)$ 具有连续导数, 令 $f(u)=F'(u)$, 求证 $\oint_L 2\,\mathrm{d}x+\frac{F(xy)}{y}\,\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u$, 其中 L 为 D 的边界, 逆时针方向.

00849

计算积分 $\iint\limits_S (x^4-z^4+y^2z^2-x^2y^2+1)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $x^2+z^2=y^2\ (y\geqslant 0)$ 被圆柱面 $x^2+z^2=2x$ 截取的部分.

00850

设 $f(x)=x^3+6x^2+3px+8$. 试确定 p 的值, 使得 $f(x)$ 有重根, 并求其根.

00851

计算 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

00852

讨论线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases}(3-2\lambda)x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & = & 1\end{cases}$$

的解的情况, 并在有解时求其解.

00853

用非退化线性替换化实二次型 $x_1^2-2x_1x_2-3x_2^2+2x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形, 并求正、负惯性指数及符号差. 判断它是否为正定二次型.

00854

设 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} X=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

求矩阵 X.

00855

设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 $n\times n$ 矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成的线性空间, V_1 是反对称矩阵的全体. 证明: (1) V_1 是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的子空间; (2) 求 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的一个子空间 V_2, 使 $\mathbb{P}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

00856

设 σ 是线性空间 V 上的可逆线性变换.

(1) 证明: σ 的特征值一定不为零;

(2) 证明: 如果 λ 是 σ 的特征值, 那么 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 σ^{-1} 的特征值.

00857

设正定的实对称矩阵 A 是正交矩阵, 证明 A 为单位矩阵.

00858

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是实数域上线性空间 V 的一组基, V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1)=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-2\varepsilon_3,\quad \mathscr{A}(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+4\varepsilon_3,\quad \mathscr{A}(\varepsilon_3)=-2\varepsilon_1+4\varepsilon_2-\varepsilon_3.$$

(1) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量;

(3) 试问 $\mathscr{A}$ 是否对角化? 若能, 求 V 的一组基 η_1,η_2,η_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为对角矩阵;

(4) 求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

00859

设 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$. 用辗转相除法求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))$, 并求 $u(x),v(x)$ 使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

00860

计算 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

00861

求 a, b 的值, 使下列非齐次线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 3x_5 & = & a, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & -1, \\ 5x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 5x_5 & = & b \end{array}\right.$$

有解, 并在它有解的情况下, 用它的一个解和它的导出组的一个基础解系表示它的全部解.

00862

用非退化线性替换化实系数二次型 @跟锦数学微信公众号

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$$

为标准形, 写出所作的非退化线性替换, 并指出正、负惯性指数及符号差.

00863

设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上是$n \times n$ 矩阵的全体关于矩阵的加法和数量乘法构成的数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 上的对称矩阵和反对称矩阵的全体,

(1) 证明: V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的子空间;

(2) 证明: $\mathbb{P}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$.

00864

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是实数域上线性空间 V 的一组基, V 上线性变换 σ 定义为: @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\sigma(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\sigma(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3.$$

(1) 写出 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 A;

(2) 求出 σ 的特征值和特征向量;

(3) 矩阵 A 是否与对角矩阵相似? 若是, 求出可逆矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 成对角形矩阵;

(4) 求 A^n;

(5) 求出矩阵 A 的最小多项式.

00865

设 A 是正交矩阵.

(1) 举例说明 A 未必有实特征值;

(2) 若 A 有实特征值 λ, 那么 $\lambda=1$ 或 -1.

00866

A 是 n 阶实对称矩阵, 证明 A 可逆充要条件是存在矩阵 B 使得 $AB+B^{\mathrm{T}}A$ 是正定矩阵.

00867

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right].$$

00868

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}.$$

00869

证明不等式 $1\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

00870

设数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_1>0,\quad x_{n+1}=\ln(1+x_n), n=1,2,\cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

00871

设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

00872

设函数 $f(x)=(x^3-3x+2)^n\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=2$ 点的邻域内有 $n-1$ 阶的连续导数. 证明: $f^{(n-1)}(2)=0$ 且 $f^{(n)}(2)=n!\cdot\varphi(2)$.

00873

分析二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的连续性与该点存在一阶偏导数的关系 (可举例说明).

00874

若二元函数 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数在点 (x_0,y_0) 某邻域存在且偏导数有界, 证明: $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

00875

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且满足 $|f''(x)|\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1)$. 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取得极值 $\frac{1}{4}$. 证明: $|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1$.

00876

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛半径和收敛区间, 并判断其收敛区间端点处的敛散性.

00877

计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma} 2(1-x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+8xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-4xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲线 $x=\mathrm{e}^y$ $(0\leqslant y\leqslant a, a>0)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面外侧.

00878

若函数 $u(x,y)$ 具有二阶偏导数, 证明: $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\quad(u\neq 0).$$

00879

证明:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[0,1]$ 一致收敛.

(2) 求 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

00880

计算下列行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix} a^2+ab & a^2b & \cdots & 0 & 0 & \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a+b & ab & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

00881

设矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & t & 1 \\ -2 & 2 & t \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -t \end{pmatrix}.$$

当 t 为何值时, 方程组 $AX=b$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解, 并给出有解时相应的解.

00882

设 $f(x),g(x)$ 是多项式, m 为任意正整数. 证明: $g^m(x)\mid f^m(x)$ 当且仅当 $g(x)\mid f(x)$.

00883

设 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$$

为实 n 维非零列向量, 令 @跟锦数学微信公众号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^{\mathrm{T}}(\alpha\beta^{\mathrm{T}}+\beta\alpha^{\mathrm{T}})x.$$

计算

(1) 若 α,β 线性相关, 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形;

(2) 若 α,β 线性无关, 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形.

00884

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_n$ ($\boldsymbol{E}_n$ 为单位阵), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对合阵. 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对合阵, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}\right)+\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\right)=n.$$

(2) n 阶对合阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化, 其相似标准形为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix},$$

其中 $r=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}\right)$.

00885

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4).$$

又由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in\boldsymbol{W}$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. 证明: 可用 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 替换 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, 使得剩下的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_3},\boldsymbol{\alpha}_{i_4}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 仍然构成子空间 $\boldsymbol{W}$, 即 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_{i_3},\boldsymbol{\alpha}_{i_4}).$$

00886

设 $\mathbb{P}$ 为数域, 令 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{V}_1=\left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n};\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right\},$$
$$\boldsymbol{V}_2=\left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n};\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right\},$$

其中 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 表示数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵的集合. 证明: $\mathbb{P}^{n\times n}=\boldsymbol{V}_1\oplus\boldsymbol{V}_2$.

00887

设 $\boldsymbol{V}$ 为全体 n $(n\geqslant 2)$ 阶实对称矩阵构成的实数域上的向量空间, 在 $\boldsymbol{V}$ 上定义二元函数 @跟锦数学微信公众号

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}),$$

其中 $\mathrm{tr}\,(AB)$ 表示矩阵 AB 的迹, E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素均为零的 n 阶方阵. 证明:

(1) V 关于 (A,B) 构成欧氏空间;

(2) 记 @跟锦数学微信公众号

$$W=L(E_{11},E_{12}+E_{21}),$$

$W^{\perp}$ 为与 W 中任一元素都正交的 n 阶实对称矩阵的全体, 求 $W^{\perp}$ 的一组基和维数.

00888

设矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

(1) 矩阵 A 可能有怎样的若尔当标准形?

(2) 求当 x 为何值时, A 可相似对角化?

(3) 当 $x=1$ 时, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=J$, 其中 J 为 A 的若尔当标准形.

00889

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=$ ____.

00890

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{\cos x-1}=$ ____.

00891

若点 $(0,1)$ 是 $y=x^3+bx^2+c$ 的拐点, 则 b,c 所满足的条件为 ____.

00892

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛域为 ____.

00893

当且仅当 p 满足 ____ 时, 无穷积分

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\,[\ln(\ln x)]^p}$$

收敛.

00894

曲线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, t\in(0,2\pi)$ 的弧长为 ____.

00895

曲面 $\mathrm{e}^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面为 ____.

00896

求 $f(x)=x$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开式 ____.

00897

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x =$ ____.

00898

若 L 为不经过原点的简单闭曲线, 方向为逆时针, 则

$$\int_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \text{____}.$$

00899

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 上的和函数.

00900

求 $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$.

00901

求 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$.

00902

求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为 $z=x^2+y^2, z\in[0,1]$ 的外侧.

00903

若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, a 为常数. 试证: $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

00904

若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调, 且 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 试证: $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

00905

已知函数 $f(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$ 二阶可导且满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}\ (\text{柯西-黎曼方程}).$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

00906

求由方程 $x^2+y^2+z^4-2x-2y-5z-4=0$ 所确定的 $z=z(x,y)$ 的整数极值点并判断极值点类型.

00907

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant M_0, |f''(x)|\leqslant M_1.$$

证明: $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}$.

00908

设 $\theta\in(0,1)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\pi \ln(1+\theta\cos x)\ \mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

00909

已知 $f(x), g(x)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式, m 为大于 1 的正整数. 证明: $g^m(x)\mid f^m(x)$ 当且仅当 $g(x)\mid f(x)$.

00910

已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵,且 @跟锦数学微信公众号

$$a_{ij}=\begin{cases} n, & i=j, \\ -1, & i\neq j \end{cases} \quad (1\leqslant i,j\leqslant n).$$

求 $|\boldsymbol{A}|$.

00911

已知 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{C}$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

试求 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

00912

已知 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2020 & 2020 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}$$

有一个二重特征值.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式以及若尔当标准形.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵, 求 $\boldsymbol{A}^{2020}$.

00913

已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}^r=0$ $(r\in\mathbb{N}^+)$. 证明: $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

00914

设 $\mathbb{K}^{n\times n}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶方阵构成的线性空间, V_1 为 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶对称方阵构成的子空间, V_2 为 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶反对称方阵构成的子空间. 证明: @跟锦数学

$$\mathbb{K}^{n\times n}=V_1\oplus V_2.$$

00915

在 $\mathbb{R}^n$ 中定义双线性函数

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}x_iy_j,$$

其中

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

问: $f(x,y)$ 是否为 $\mathbb{R}^n$ 上的内积? 若是请证明; 若不是, 请说明理由.

00916

已知 A 为复数域上的 n 阶方阵, 且存在正整数 m 使得 $A^m=E$. 证明:

(1) A 与对称矩阵相似.

(2) A 的特征值为 m 次单位根.

00917

已知 $f(x),g(x)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的两个一元多项式. 证明: 存在 $\mathbb{K}$ 上非零二元多项式 $p(x,y)$, 使得 $p\left(f(x),g(x)\right)=0$.

00918

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

00919

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right).$$

00920

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

00921

设 $y=\arccos\frac{1}{|x|}$, 求 $\mathrm{d}y$.

00922

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2019})}\,\mathrm{d}x.$$

00923

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right).$$

00924

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|},$$

其中平面曲线 L 是抛物线 $y=x^2-4$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$ 的一段.

00925

设 a 为正常数.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

00926

设数列 $\{a_n\}$ 既无最大值, 也无最小值. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 发散.

00927

设函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

00928

设方程 $x^n+nx-1=0$, 其中 n 为正整数. 证明: 此方程有唯一正实根 x_n, 且当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

00929

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶导数, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界, 证明: 存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

00930

设函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3\cos\frac{y}{x}}{x^2+y^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明: 在点 $(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 连续, 且任意方向的方向导数都存在, 但不可微.

00931

记区间 $I=(0,+\infty)$, 证明: 含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2y}\sin y\,\mathrm{d}y$ 在 I 内不一致收敛, 但在 I 内的任何一个闭区间上一致收敛.

00932

计算第二类曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲面 $\Sigma:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 方向取外侧.

00933

若 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ ax-a, & x>1\end{cases}$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 则常数 $a=$ ____.

00934

设 $[x]$ 为 x 的最大整数部分, 则 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=$ ____.

00935

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x=$ ____.

00936

设 $f(x)=\arctan x$, 则 $f^{(2n)}(0)=$ ____, 其中 n 为正整数.

00937

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间是 ____.

00938

设 $q>p$, 且$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 p 和 q 的取值范围是 ____.

00939

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\frac{1^2}{n}}+\dfrac{1}{n+\frac{2^2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{n^2}{n}}\right)=$ ____.

00940

二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\mathrm{e}^{x^2+y^2-2x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____.

00941

设 $x=u+v, y=u^2+v^2\ (u-v\neq 0)$, 定义 u,v 为 x,y 的函数, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ ____.

00942

第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L (xe^{x^2}+y)\,dx+\sin y^2\,dy=\text{\_\_\_\_},$$

其中 L 为曲线 $y=\sqrt{x-x^2}$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,0)$ 的一段.

00943

光滑曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ (a 和 b 为非零常数) 上任一点的切平面平行于直线 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z,$$

其中 $aF_1'+bF_2'\neq 0$.

00944

可导的偶函数的导函数为奇函数, 可导的奇函数的导函数为偶函数.

00945

若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数都存在且只有 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 点不一定可微.

00946

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上存在有界导数, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

00947

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, $f'(a)=f'(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$,

使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

00948

计算第二类曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 为单位球面外侧.

00949

设 $\beta > \alpha > 0$, 求积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

00950

多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = (x^{10} - x^9 + x^9 - \cdots - x + 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$$

的所有偶次项系数之和是 ____.

00951

已知 a, b, c 两两不同, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

的充分必要条件是 ____.

00952

已知 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2 & a_3+2b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ____.

00953

设二维欧氏空间的一组基为 α,β, 它的度量矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

η 在基下的坐标为 $(3,-4)$, 求此向量的长度 $|\eta|=$ ____.

00954

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的幂零线性变换, 且 $\mathscr{A}^{n-1}\neq\mathscr{O}$, 则 $\mathscr{A}$ 的值域的维数 $\dim\mathscr{A}V=$ ____.

00955

在实数域上将多项式 $f(x)=x^5+32$ 分解为不可约多项式的乘积.

00956

设 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

(1) 计算 D_1,D_2,D_3,

(2) 从第 1 问中找规律, 正确计算 D_4.

00957

设数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -6 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

00958

设实对称矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

00959

设多项式 $f(x)$ 满足 $f(x) \mid f(x^2)$, $f(0)=1$. 证明: 若 $x=\alpha$ 是 $f(x)$ 的根, 则 $\alpha=\pm 1$.

00960

用 r_{A} 表示方阵 A 的秩, A, B 都是 n 阶方阵, 证明:

(1) $\mathrm{r}_{AB} \geqslant \mathrm{r}_{A}+\mathrm{r}_{B}-n$;

(2) 如果 $\mathrm{r}_{A^2}=\mathrm{r}_{A^3}$, 则有 $\mathrm{r}_{A^3}=\mathrm{r}_{A^4}$.

00961

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都是线性空间 V 的线性变换, 且 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$. 证明: $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ 当且仅当 $\mathscr{A}V$ 及 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 均为 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

00962

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, V_1, V_2 是 V 的;两个子空间, 证明: $V=V_1\oplus V_2$ 当且仅当存在 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}, V_1=\mathscr{A}V, V_2=\mathscr{A}^{-1}(0).$$

00963

设 $0<p<1$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left\{\left[\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b|g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

00964

内积空间是严格凸空间.

00965

求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$ 的值.

00966

设 n,k 是整数, $n>2$, $1\leqslant k\leqslant n$. 设复数 ω 满足 $\omega^n=1$ 但是 $\omega^T\neq 1$ 对任意 $t=1,\cdots,n-1$ (称这样的 ω 为 n 次本原单位根). 令 $A=(\omega^{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}$ 是一个 n 阶方阵. 令 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 是由 A 的第 i_1 行, $\cdots$, 第 i_k 行和第 j_1 列, $\cdots$, 第 j_k 列的交叉位置的元素构成的 k 阶子矩阵, 这里 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$.

(1) 证明: 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, $A\begin{pmatrix}1\cdots k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵.

(2) 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 以及对任意的 @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n, 1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n,$$

$A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 一定可逆吗? 如果是, 给出证明; 如果不是, 给出反例.

00967

[导数介值定理]设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)<0$.

00968

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=f(1)$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且对一切 $x\in[0,1]$ 都有 $f'(x)\neq 1$, 记 $g(x)=f(x)-x$, $n\geqslant 2$ 为正整数, 求证:

(1) $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递减;

(2) $-\frac{n}{2}<\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)<-\frac{n}{2}+1$;

(3) $\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}$.

00969

求由 $z=x+y$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成的几何体体积.

00970

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

00971

设 D 为平面上的有界域, $f(x,y)$ 在 D 上可微, 在 $\bar{D}$ 上连续, 在 $\bar{D}$ 的边界上 $f(x,y)=0$, 且在 D 上满足: $f_x+f_y=f$. 证明: 在 $\bar{D}$ 上 $f(x,y)=0$.

00972

设 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 以直线 $y=ax+b$ 为渐近线, 求证: $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上一致连续.

00973

设 A,B,C 均为 n 阶方阵, 适合 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$. 试证: $\mathrm{r}(ABC)=\mathrm{r}(BC)$.

00974

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $M_n(\mathbb{F})$ 是由所有 n 阶 $\mathbb{F}$ 矩阵在矩阵加法和数乘矩阵之下构成的 $\mathbb{F}$ 向量空间. 设 V 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个非零子空间, 且满足 V 中的任何非零矩阵都是可逆矩阵.

(1) 举出一个这样的子空间 V 的例子从而说明这样的子空间确实存在.

(2) 证明 V 的维数满足: $\dim V\leqslant n$.

00975

求证:

(1) 对任一收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 必存在正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 满足:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$;

(2) 对任一通项为正的发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 必存在发散正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 满足: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$.

00976

讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛性和一致收敛性.

00977

设 $f(x)$ 在 a 点处具有直到 n 阶的导数, $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$, 证明:

(1) 当 n 为奇数时, $f(a)$ 不是极值;

(2) 当 n 为偶数时, $f(a)$ 是极值, 并指出什么时候是极大值, 什么时候是极小值.

00978

设 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant M_0$,

$|f''(x)| \leqslant M_1$, 证明: $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_1}$.

00979

设 A 是 n 级正交矩阵且 $|A| = 1$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = a_0x_n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

是 A 的特征多项式. 证明:

(1) 当 n 为偶数时, 对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n$, 有 $a_i = a_{n-i}$.

(2) 当 n 为奇数时, 对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n$, 有 $a_i = -a_{n-i}$.

(3) 当 $n = 2$ 时, 存在正交矩阵 B 使得 $A = B^2$.

00980

设常数 $0 < c < 1$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(cx)}{x} = A$ 存在且有限, 求证: $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, 并证明: $f'(0) = \dfrac{A}{1-c}$.

00981

Suppose that $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ and $g \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ with $1 < p, q < \infty$, $1/p+1/q = 1$. Then $\nabla(fg)$ is in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Furthermore, we have @跟锦数学微信公众号

$$\|\nabla(fg)\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C\,\|\nabla f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q} + C\,\|f\|_{L^p}\,\|\nabla g\|_{L^q}\,, \tag{2}$$

where C is independent of f and g.

00982

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, $f(x) \geqslant c > 0$, 试证: $\ln f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

00983

试证: $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $(0, +\infty)$ 内不一致收敛.

00984

对 $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $\beta\geqslant 1$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$(|\boldsymbol{x}|^{\beta-1}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{y}|^{\beta-1}\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\geqslant\frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{x}|^{\beta-1}+|\boldsymbol{y}|^{\beta-1}\right)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2,$$

且 $\frac{1}{2}$ 不能再改进. 这里, @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^n x_iy_i,\quad \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n).$$

00985

For $f\in\dot{B}^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $g,h\in H^1(\mathbb{R}^3)$ and any $\varepsilon>0$, $0<r<1$, $k\in\{1,2,3\}$, we have @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k f\cdot gh\,\mathrm{d}x\leqslant C\,\|f\|_{\dot{B}^r_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{1+r}}\|(g,h)\|_{L^2}^2+\varepsilon\,\|\nabla(g,h)\|_{L^2}^2\,. \tag{3}$$

00986

[Hardy type inequality]If $1<p<+\infty$, $r\neq 1$, $f\geqslant 0$, and @跟锦数学微信公众号

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & r>1,\\ \int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t, & r<1,\end{cases}$$

then @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p\int_0^\infty x^{-r}(xf)^p\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

00987

Let $\frac{3}{2}<q<3$, and $f,g\in C_c^1(\mathbb{R}^3)$, we have @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}^3}|f|^2|g|^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\leqslant C\,\|\nabla f\|_{L^q}^2\,\|g\|_{L^2}^{\frac{2(2q-3)}{q}}\,\|\nabla_h g\|_{L^2}^{\frac{2(3-q)}{q}},$$

where C depends only on q.

00988

判断下列论断是否正确, 并证明你的结论:

设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维实线性空间 V 上的两个线性变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$; 又已知 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都存在特征向量, 则 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 必有公共的特征向量.

00989

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1).$$

00990

试证: (1) $\inf\limits_{n\geqslant 1}|\sin n|=0$; (2) $\{\sin n\}$ 发散; (3) 试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin n)x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

00991

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义, 且 $g(0)>0$, $g(1)<0$, $f(x)+g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 试证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$.

00992

定义 ψ 为 $[0,1]$ 到 n 阶方阵全体组成的欧氏空间的连续映射, 使得 $\psi(0)$ 为第一类正交阵, $\psi(1)$ 为第二类正交阵. 证明: 存在 $T_0\in(0,1)$, 使得 $\psi(T_0)$ 退化.

00993

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中简单光滑闭曲面 Σ 所围的有界连通区域. 考查问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases}\Delta u=0, & (x,y,z)\in\Omega\\ u|_{\Sigma}=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma\end{cases}, \tag{5}$$

其中 $f(x,y,z)$ 为已知连续函数, $u(x,y,z)$ 为具有二阶连续偏导的未知函数. 证明若问题 (5) 有界, 则其解是唯一的, 即若 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 皆满足 (5), 则有 $u(x,y,z)=v(x,y,z)$.

00994

设 $n\geqslant 2$, 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都大于 -1, 并且它们有着相同的符号. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

00995

[矩阵迹的一些性质]设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 则 A 的迹 (trace) 为 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

它有如下性质:

(1) [线性泛函] $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^T)$, $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$, $\operatorname{tr}(cA)=c\cdot\operatorname{tr}(A)$, $\forall\ c\in\mathbb{F}$;

(2) [相似不变量] 若 A,B 相似, 则 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$;

(3) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$;

(4) $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(A^TB)$ 是 n 阶实方阵全体构成的实线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 上的内积.

00996

设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f(x)>0$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(t)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 对每个 $t\neq 0$, 有 $|\hat{f}(t)|<\hat{f}(0)$.

00997

Let λ_1,ν,α be positive and $\beta>3$. If @跟锦数学微信公众号

$$\lambda_1\nu^2[\nu\alpha(\beta-1)]^{\frac{2}{\beta-3}}>\frac{\beta-3}{\beta-1},$$

then there exists a positive δ such that @跟锦数学微信公众号

$$\nu\lambda_1 + \alpha(|x|^{\beta-1} + |y|^{\beta-1}) - \frac{1}{2\nu}(|x|^2 + |y|^2) \geqslant \delta, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

00998

[Evans PDE P 307]Integrate by parts to prove @跟锦数学微信公众号

$$\|Du\|_{L^p} \leqslant C\,\|u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}}\,\|D^2u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

for $2 \leqslant p < \infty$ and all $u \in C_c^\infty(U)$.

00999

[Evans PDE P 309]Use the Fourier transform to prove that if $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ for $s > n/2$, then $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, with the bound @跟锦数学微信公众号

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,.$$

01000

设 A, B 都是 n 阶实方阵, A 半正定, B 半负定, 则 $\operatorname{tr}(AB) \leqslant 0$.

01001

设 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, $f \in C^1(D)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_D |f(x, y) - f(0, 0)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D \frac{\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

01002

设 $\{a_n\}$ 递减趋于零, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n} < \infty \Leftrightarrow a_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right),\ \sum_{n=1}^\infty (a_n - a_{n+1}) \ln n < \infty.$$

01003

已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $\varphi(y)$, 写出用 f', f'', f''' 表示 φ', φ'', φ''' 的表达式.

01004

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵. 若 n 是奇数, 试证: $|\boldsymbol{A}|=0$.

01005

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right).$$

01006

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为半正定矩阵, 且 $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)=0$, 求证: 对任意正整数 m, 都有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m=\boldsymbol{A}^m+\boldsymbol{B}^m$.

01007

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实半正定矩阵, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\right).$$

01008

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶反对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量. 若 n 是偶数, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$|\boldsymbol{A}+x\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T|=|\boldsymbol{A}|.$$

01009

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\geqslant\max\left\{\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\right),\mathrm{r}\left(\boldsymbol{B}\right)\right\}.$$

01010

设 $f:(-a,a)\setminus\{0\}\to(0,+\infty)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]=2.$$

试证: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

01011

设 $\alpha>0$, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

01012

设 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

01013

设 $f(x),g(x)$ 分别是 m 次和 n 次多项式, 其中 $m>0,n>0$. 证明:

(1) 存在次数低于 n 的多项式 $u(x)$ 与次数低于 m 的多项式 $v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=res(f(x),g(x))$;

(2) $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当 $res(f(x),g(x))\neq 0$.

这里, 对任意的多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

@跟锦数学微信公众号

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

我们定义 $f(x), g(x)$ 的结式 $res(f(x), g(x))$ 为由两多项式系数形成的 Sylvester 矩阵 A 的行列式, 其中 (f 的系数有 m 行, g 的系数有 n 行) @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

01014

已知 A 为三阶实正交矩阵, $\det A=1$. 试证: 存在正交矩阵 P, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$\cos\theta=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}.$$

01015

坤宁的诗句

01016

黄庭坚的诗句

01017

李商隐的诗句

01018

黄巢的诗句

01019

会意

01020

曹雪芹《红楼梦》中的好了歌

01021

设 f 在 (a,b) 上单增, 试证: 对 $\forall\ x\in(a,b)$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x-0)=\sup_{y<x}f(y),\quad f(x+0)=\inf_{y>x}f(y)$$

存在.

01022

设 X 是 Banach 空间, f 是 X^2 到 X 的双线性映射. 若 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ 0<\alpha<\frac{1}{4\|f\|},\quad \|f\|=\sup_{\|u\|,\|v\|\leqslant 1}\|f(u,v)\|,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ a\in B(0,\alpha),\ \exists\mid x\in B(0,2\alpha),\ \text{s.t. } x=a+f(x,x).$$

01023

试证: @跟锦数学微信公众号

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,\quad x>1.$$

01024

试建立 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 之间的一一对应.

01025

设 u 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^5$ 中的单位向量, 定义 $T_u(x)=x-2\langle x,u\rangle u$. 现设 α,β 是 $\mathbb{R}^5$ 中线性无关的两个单位向量, 问当 α,β 满足什么条件时, 存在正整数 k 使得 $(T_\alpha T_\beta)^k$ 为单位映射.

01026

在度量空间 (X,ρ) 中, 开球 $B(x,r)=\{y\in X;\rho(y,x)<r\}$ 的闭包一定是 $\{y\in X;\rho(y,x)\leqslant r\}$ 么? 如果是, 请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

01027

设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 均是连续的周期函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

试证: $f\equiv g$.

01028

设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 一致连续, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0,\quad \forall\ x\geqslant 0.$$

试证: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

01029

设 (X,ρ) 是度量空间, A 是 X 的非空子集, 考虑 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\operatorname{dist}(x,A)\overset{\text{def}}{=}\inf_{y\in A}\rho(x,y),\quad x\in X.$$

试证: f 是 X 上的一致连续函数.

01030

压力与烦恼

01031

张祖锦《修》

01032

设 f 在 $[-1,1]$ 上可导, $M=\sup|f'|$. 若 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ a\in(0,1),\ \text{s.t.}\ \int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(1-a^2).$$

01033

设 f 在 $[0,2]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(2)=1$. 若 $|f'|\leqslant 1$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

01034

设 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0$, $f'(1)=1$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 4,$$

并指出不等式中等号成立的条件.

01035

对任意的 $a>0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+a}\sqrt{\frac{a}{k}}<\pi.$$

01036

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ 都是正数, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} a_k}>\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)>1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$;

(2) $\dfrac{1}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k}>\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)>1-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

01037

设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 且 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. 证明 Chebychëv (切比雪夫, 1821 $\tilde{1}$894) 不等式: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

01038

求极限 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} n \sin (2 \pi n!\mathrm{e})$.

01039

设常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x \rightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sin \sqrt{x+k}=0 .$$

01040

求极限 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \sin (\pi \sqrt{n^2+1})$.

01041

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对合阵, 即 $A^2=E_n$. 试证; $n-\operatorname{tr} A$ 是偶数; 且 $\operatorname{tr} A=n \Leftrightarrow A=E_n$.

01042

设方阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ a-2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可对角化, 求 a 的值.

01043

设 $A_1,\cdots,A_n\in M_n(\mathbb{F})$, $g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $g(A_1),\cdots,g(A_n)$ 都是非异阵. 证明: 存在$h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $g(A_i)^{-1}=h(A_i)$ 对所有的 $1\leqslant i\leqslant m$ 都成立.

01044

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant A,\quad |f''(x)|\leqslant B,\quad \forall\ x\in[a,b],$$

并且 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ x_0\in[a,b],\ \text{s.t. } |f'(x_0)|\leqslant D.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}+D,\quad \forall\ x\in[a,b].$$

01045

[杨忠道定理]拓扑空间中每个子集的导集都是闭集当且仅当每个单点集的导集是闭集.

01046

单调函数的不连续点集是可数集.

01047

证明: 任何一个有限补空间和任何一个可数补空间都是局部连通空间.

01048

设 $A \subset \mathbb{R}$, 试证: A 是连通的 $\Leftrightarrow$ A 是道路连通的.

01049

设 X 是一个满足第一可数性公理的空间, $A \subset X$. 证明 A 是一个开子集当且仅当对于 X 中的任何一个序列 $\{x_i\}$, 只要 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in A$, 则存在 $N > 0$ 使得当 $i \geqslant N$ 时有 $x_i \in A$.

01050

已知 $c^2 - 4ab \neq 0$, 计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} c & a & & & \\ b & c & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & c & a \\ & & & b & c \end{vmatrix}.$$

01051

设矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, 定义 $C = (a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$. 证明: 若 A, B 半正定, 则 C 半正定.

01052

板书与ppt

01053

科学上网

01054

可表示拟阵

01055

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\arctan a - \arctan b > \frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}, \quad \forall\ a > b > 0.$$

01056

设 R 是集合 X 上的等价关系; $p : X \to X/R$ 是自然映射; 对 $i = 1, 2$, $p_i : X \times X \to X$ 是第 i 个投射, 也即 @跟锦数学微信公众号

$$p_1(x,y) = x, \quad p_2(x,y) = y, \ \forall\ (x,y) \in X \times X.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$p^{-1}[p(A)] = p_2[p_1^{-1}(A) \cap R], \ \forall\ A \subset X.$$

01057

当 a 取何值时, 边值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y''(x) + ay(x) = 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

没有解.

01058

设 $f(x)$ 是 $(a, +\infty)$ 上的连续函数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

$x_0 > a$ 是一常数, k 是一正常数. 求初值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y' + ky = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解, 并计算该解当 $x \to +\infty$ 时的极限.

01059

设 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{d,e,f,g\}$, $R=\{(a,d),(a,e),(b,f)\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{d,e,g\}$. 试求 $R(A)$, $R^{-1}(B)$, R 的值域与定义域.

01060

实数集合 $\mathbb{R}$ 中第一个关系 R 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x-y\in\mathbb{Z}\right\}.$$

证明 R 是一个等价关系.

01061

设 X,Y 是两个集合, $f:X\to Y$. 试证:

(1) 对于任意 $A\subset X$, @跟锦数学微信公众号

$$A\subset f^{-1}\left(f(A)\right);$$

(2) 对于任意 $B\subset Y$, @跟锦数学微信公众号

$$B\supset f\left(f^{-1}(B)\right),$$

(3) f 是一个满射当且仅当 @跟锦数学微信公众号

$$B=f(f^{-1}(B))$$

对于任何 $B\subset Y$ 成立.

01062

设 A 是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 它包含着某个非退化的开区间, 即存在 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 使得 $A\supset(a,b)$. 证明 $\operatorname{card}A=\aleph$.

01063

设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}\,(A)=k$, 证明:

(1) 若 $A=A_1+A_2+\cdots+A_l$, 且 $\mathrm{r}\,(A_i)=1, i=1,2,\cdots,l$, 则 $l\geqslant k$;

(2) 存在秩为 1 的矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 使得 $A=A_1+A_2+\cdots+A_k$.

01064

设 $\sigma, \sigma' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $\sigma(x, y) = (x - y)^2$ 和 $\sigma'(x, y) = |x^2 - y^2|$. 证明 σ 和 σ' 都不是 $\mathbb{R}$ 的度量.

01065

试证:

(1) 从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射;

(2) 从离散空间到拓扑空间的任何映射都是连续映射.

01066

求集合的导集和闭包:

(1) 设 A 是有限补空间 X 中的一个无限子集, 求 A 的导集和闭包;

(2) 设 A 是可数补空间 X 中的一个不可数子集, 求 A 的导集和闭包;

(3) 求实数空间 $\mathbb{R}$ 中的有理数集 $\mathbb{Q}$ 的导集和闭包;

(4) 设 X^* 是 §2.2 习题 9 中定义的拓扑空间, 求单点集 $\{\infty\}$ 的导集和闭包.

01067

设 X 是一个拓扑空间, $A, B \subset X$. 证明:

(1) $A^- = A \cup \partial A$, $A^o = A \setminus \partial A$;

(2) $\partial(A^o) \subset \partial A$, $\partial(A^-) \subset \partial A$;

(3) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $(A \cup B)^o \supset A^o \cup B^o$;

(4) $\partial A = \varnothing$ 当且仅当 A 是一个既开又闭的集合;

(5) $\partial(\partial A) \subset \partial A$;

(6) $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$.

01068

设 X 是一个度量空间. 证明: 如果 X 有一个基只含有有限个元素, 则 X 必为含有有限多个点的离散空间.

01069

如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开 (闭) 子集, 则 Y 作为 X 的子空间时特别地被称为 X 的开 (闭) 子空间. 证明:

(1) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开子空间, 则 $A\subset Y$ 是 Y 中的一个开集当且仅当 A 是 X 的一个开集;

(2) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个闭子空间, 则 $A\subset Y$ 是 Y 中的一个闭集当且仅当 A 是 X 的一个闭集.

01070

设 (X,ρ) 是一个度量空间, 证明映射 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射.

01071

设 f 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数, 满足 $f(0)=f(1)=0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当 $f(x)=Ax(1-x)$, 其中 A 是常数.

01072

设 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=1,$$

且满足 $a_{ij}=-a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n$. 对任意的 x, 求 n 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}.$$

01073

设 A 为 $s\times n$ 矩阵. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$s-\mathrm{r}\left(E_s-AA^T\right)=n-\mathrm{r}\left(E_n-A^TA\right).$$

01074

设 A 为对称矩阵, 存在线性无关的向量 x_1,x_2, 使得 $x_1^TAx_1>0$, $x_2^TAx_2<0$. 证明: 存在线性无关的向量 x_3,x_4 使得 x_1,x_2,x_3,x_4 线性相关, 且 $x_3^TAx_3=x_4^TAx_4=0$.

01075

设 σ,τ 为线性变换, 且 σ 有 n 个不同的特征值. 证明: 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则 τ 可由 I, σ, σ^2, $\cdots$, σ^{n-1} 线性表出, 其中 I 为恒等变换.

01076

设 $f(x)$ 为 A 的特征多项式, 且存在互素的次数分别为 p,q 的多项式 $g(x),h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)h(x)$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\left[g(A)\right]=q,\quad \mathrm{r}\left[h(A)\right]=p.$$

01077

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant M_0,\quad |f^{(n)}(x)|\leqslant M_n,\quad (M_0,M_n\text{ 为常数}).$$

求证:

(1) $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;

(2) $|f^{(k)}(x)|\leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$, $(0\leqslant k\leqslant n)$.

01078

试求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \mathrm{e}^x \cos y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

01079

设 X, Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是商映射. 令 @跟锦数学微信公众号

$$R = \left\{(x, y) \in X^2; f(x) = f(y)\right\}.$$

试证: (1) R 是 X 中的一个等价关系; (2) Y 同胚于商空间 X/R.

01080

设 A 和 B 是拓扑空间 X 的隔离子集, 证明: 如果 $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, 则 A_1 和 B_1 也是隔离子集.

01081

设 X 是一个拓扑空间, $x, y \in X$ 是连通的. 证明: 如果 E 是一个既开又闭的子集, 则或者 $x, y \in E$ 或者 $x, y \notin E$. (此命题的逆命题不成立, 见下题.)

01082

设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负递增, 并且积分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(x)-x}{x^2} \mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

01083

设函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\left[x f(x) - f(0) \sin x\right] \cos^n x \,\mathrm{d}x = 0.$$

01084

科研思路

01085

科研思路

01086

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域连续, 且 $f(0)\neq 0$, 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x(\sin x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

01087

诸葛亮关于人之交往

01088

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$ 是一个连续映射. 证明: 如果 X 是一个可分空间, 则 $f(X)$ 也是可分的. (这说明可分性是一个连续映射所保持的性质, 并且由此可见, 它是一个拓扑不变性质, 可商性质.)

01089

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$ 是一个连续映射. 证明: 如果 X 是一个 Lindelöff 空间, 则 $f(X)$ 也是一个 Lindelöff 空间.

01090

设 X 是一个拓扑空间, 证明: X 是 T_0 空间当且仅当对于任何 $x,y\in X$, $x\neq y$, 或者 $\{x\}\cap\overline{\{y\}}=\varnothing$ 或者 $\{y\}\cap\overline{\{x\}}=\varnothing$.

01091

设 X 是一个拓扑空间, 证明: X 是 T_1 空间当且仅当对于任何 $x \in X$, 点 x 的所有邻域的交恰是单点集 $\{x\}$.

01092

设 U 是拓扑空间 X 中的一个开集. 证明: 如果 X 中的一个由紧致闭集构成的集族 $\mathscr{B}$ 满足条件 $\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B \subset U$, 则存在 $\mathscr{B}$ 的一个有限子族 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U.$$

01093

设 X 是一个 Hausdorff 空间, $\mathscr{A}$ 是它的一个非空集族, 且由 X 的紧致子集构成. 证明: $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ 是 X 的一个紧致子集.

01094

弱收敛的一个充分条件

01095

设 A, B 都是实反对称矩阵, 且 A 可逆, 则 $|A^2 - B| > 0$.

01096

设 X, Y 分别为 $m \times n$ 与 $n \times m$ 阵, 且 @跟锦数学微信公众号

$$YX = E_n, \quad A = E_m + XY.$$

证明: A 相似于对角阵.

01097

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的增函数. 再设 $x_0 \in [a,b)$, 而点列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n > x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在.

01098

设 A 为 n 阶正定矩阵, x, y 为 n 维列向量且满足 $x^T y > 0$. 试证: 矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$M = A + \frac{xx^T}{x^T y} - \frac{Ayy^T A}{y^T Ay}$$

正定.

01099

Δf 乘以 $|f|^{q-2} f$ 后的积分如何化简?

01100

已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, 其中 a 为常数. 如果 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2. 试证: $x_1 x_2 > \mathrm{e}^2$.

01101

设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1) = 3\int_0^{1/3} \mathrm{e}^{x-1} f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

01102

设 f 为 $[0,1]$ 上的连续正函数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f^2(t) \leqslant 1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

证明: $f(t) \leqslant 1 + t$.

01103

$$-\int \Delta u\cdot|u|^{q-2}u \text{ 的化简}$$

01104

设 f 为 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 找出满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=a,\quad \int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=a^2$$

的所有 f, 其中 a 为给定实数.

01105

设 $f\in C^2[0,\pi]$, 且 $f(\pi)=2$, $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$. 求 $f(0)$.

01106

设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 定义 $F(x)=\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$, $a\leqslant x\leqslant b$. (1) 证明: F 在 $[a,b]$ 上可导; (2) 计算 $F'(x)$.

01107

设 $n\in\mathbb{N}^+$, 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

01108

令 $B(m,n)=\displaystyle\sum_{k=0}^n C_n^k\frac{(-1)^k}{m+k+1}$, $m,n\in\mathbb{N}^+$.
(1) 证明 $B(m,n)=B(n,m)$; (2) 计算 $B(m,n)$.

01109

证明: 当 $m<2$ 时, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^m}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=0$.

01110

证明: 当 $\lambda<1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty} R^\lambda\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$.

01111

计算以下渐近等式 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)$$

中的待定常数 a,b.

01112

设非负严格增加函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 有积分中值定理, 对于每个 $p>0$ 存在唯一的 $x_p\in(a,b)$, 使 @跟锦数学微信公众号

$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\,\mathrm{d}t.$$

试求 $\lim\limits_{p\to\infty}x_p$.

01113

设 $f\in C[0,+\infty)$, a 为实数, 且存在有限极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

证明; $f(+\infty)=0$.

01114

@跟锦数学微信公众号

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha(fg)-(D^\alpha f)g\|_{L^2}\leqslant C\left(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^m}+\|f\|_{H^{m-1}}\|\nabla g\|_{L^\infty}\right).$$

01115

Assume that a is a positive constant, $x(t), y(t)$ are two nonnegative $C^1(\mathbb{R}^+)$ functions, and $D(t)$ is a nonnegative function, satisfying @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2)+D \leqslant a(x^2+y^2+x+y)D.$$

If additionally, the initial data satisfy @跟锦数学微信公众号

$$x^2(0)+y^2(0)+\sqrt{2(x^2(0)+y^2(0))}<\frac{1}{a},$$

then, for any $t>0$, one has @跟锦数学微信公众号

$$x^2(t)+y^2(t)+x(t)+y(t)<x^2(0)+y^2(0)+\sqrt{2(x^2(0)+y^2(0))}<\frac{1}{a}.$$

01116

For $f \in H^s(\mathbb{R}^3)$ with $s>\frac{3}{2}$, we have @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\left(1+\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\right)\ln\left(1+\|f\|_{H^s}\right), \quad s>\frac{3}{2}.$$

01117

@跟锦数学微信公众号

$$(\nabla \times b)\times b=-\nabla\frac{|b|^2}{2}+(b\cdot\nabla)b.$$

01118

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}+k}$.

01119

设 $x \neq 0$, 矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}(A^n-E)$.

01120

设 $f(x)=x^2\ln(x+1)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

01121

证明不等式:

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2},\quad x>0.$$

01122

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求其极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$;

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$;

(4) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}\left(1-\dfrac{nx_n^2}{3}\right)$.

01123

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 又

$$\phi(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

单调递减. 证明: $f\equiv 0$.

01124

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 其正负惯性指数分别是 p,q. 再设

$$f(x)=x^TAx,\quad N_f=\{x\in\mathbb{R}^n;f(x)=0\}.$$

证明:

(1) 包含于 N_f 的线性空间的维数至多是 $n-\max\{p,q\}$;

(2) 若 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间, 将二次型限定在 W 中得到正负惯性指数分别是 p_1,q_1, 则有 $p_1\leqslant p$, $q_1\leqslant q$.

01125

在 [Yosida, Kō saku. Functional analysis. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995] 第 126-127 页给出了一致凸 Banach 空间的定义: 若 Banach 空间 X 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \text{s.t.}$$

$$\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\Rightarrow\|x+y\|\leqslant 2(1-\delta).$$

则称 X 是一致凸的 Banach 空间. 试证: 若 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1,\quad\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon'>0,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n+y_n\|<2.$$

01126

设 V 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的三维线性空间, $\mathscr{A}:V\to V$ 是一个线性变换. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in V$ $(\alpha_1\neq 0)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}\alpha_1=\alpha_2,\quad\mathscr{A}\alpha_2=\alpha_3,\quad\mathscr{A}\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2.$$

证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基.

01127

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明: 对于任意的实数 λ, 一定存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(\xi)-\lambda f(\xi)+\lambda f(\xi)=1.$$

01128

函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减, 证明: 对于任何 $\alpha\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

01129

设 $a_n>0$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散.

01130

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶连续可导, $f(a)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

01131

设 $f(x)$ 二阶连续可导, $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant-16.$$

01132

试证: $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

01133

设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵, 即 $A^*\equiv\bar{A}^T=A$. 试证:

(1) $\alpha^*A\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{C}^n$;

(2) A 的特征值均为实数;

(3) $\|(A\pm\mathrm{i}E)\alpha\|^2=\|A\alpha\|^2+\|\alpha\|^2$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{C}^n$;

(4) $A\pm\mathrm{i}E$ 可逆;

(5) $B=(A-\mathrm{i}E)(A+\mathrm{i}E)^{-1}$ 是酉矩阵, 即 $B^*B=BB^*$;

(6) $E-B$ 可逆;

(7) $A=\mathrm{i}(E+B)(E-B)^{-1}$.

01134

设 B 是 n 阶酉矩阵, 满足 $\mathrm{r}\,(E-B)=n$. 试证: 存在唯一的 n 阶 Hermite 矩阵 A 使得 $(A-\mathrm{i}E)(A+\mathrm{i}E)^{-1}=B$.

01135

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^{\frac{1}{\ln 2}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}>1,\quad x>1.$$

01136

设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\bar{D}^{+}f(x)=\overline{\lim_{y\to x^{+}}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geqslant 0,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

试证: $f(a)\leqslant f(b)$.

01137

在实数空间 $\mathbb{R}$ 中给定如下等价关系: @跟锦数学微信公众号

$$x\sim y\Leftrightarrow x,y\in(-\infty,1)\text{ 或者 }x,y\in[1,2)\text{ 或者 }x,y\in[2,+\infty).$$

设在这个等价关系下得到的商集 $Y=\{[-2],[1],[2]\}$, 试写出 Y 的商拓扑.

01138

域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵 A 称为幂等矩阵, 如果 $A^2=A$. 试证: 若 A 幂等, 则 A 可对角化, 且 $\mathrm{r}\,(A)=\mathrm{tr}\,(A)$.

01139

@跟锦数学微信公众号

$$\nabla\times(a\times b)=(b\cdot\nabla)a-(a\cdot\nabla)b+a(\nabla\cdot b)-b(\nabla\cdot a).$$

01140

@跟锦数学微信公众号

$$0<p<\infty \Rightarrow H_p=\dot{F}^0_{p,2};\quad BMO=\dot{F}^0_{\infty,2}.$$

01141

@跟锦数学微信公众号

$$\nabla\cdot b=0 \Rightarrow \nabla\times[(\nabla\times b)\times b]=\nabla\times[\nabla\cdot(b\otimes b)].$$

01142

@跟锦数学微信公众号

$$\dot{B}^0_{\infty,2}\subsetneq BMO.$$

01143

设 $f\in L(\mathbb{R})$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛到一 Lebesgue 函数.

01144

Let @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad 1\leqslant p,q\leqslant r\leqslant\infty,\quad 0<\theta<1,\\ -\lambda+\frac{n}{p}<\frac{n}{r}<-\mu+\frac{n}{q},\\ \frac{n}{r}=(1-\theta)\left(-\lambda+\frac{n}{p}\right)+\theta\left(-\mu+\frac{n}{q}\right).\end{aligned}$$

Then @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{r,1}}\leqslant\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{\lambda}_{p,\infty}}\|f\|^{\theta}_{\dot{B}^{\mu}_{q,\infty}}.$$

01145

设 $\mathbb{F}$ 为数域, 如果 $p_1(x),\cdots,p_r(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 r 个两两不同的首相系数为 1 的不可约多项式, 证明: $f(x)=p_1(x)\cdots p_r(x)$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上无重根.

01146

设 V 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式组成的向量空间. 对于 V 上的任意多项式 $f(x)$, 以 x^2-1 除 $f(x)$ 所得的商式及余式分别为 $q(x)$ 和 $r(x)$, 记 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=q(x)(x^2-1)+r(x).$$

设 $\mathscr{A}$ 是 V 到 V 的映射, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}(f(x))=r(x).$$

试证: $\mathscr{A}$ 是一个线性变换, 并求它关于基底 $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ 的矩阵.

01147

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$, 则对 $\forall\ x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

01148

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 试证: 对任意 $c\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

01149

设 f 在 $[0,c]$ 上连续, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,c)$ 时, $f''(x)<0$. 试证: 当 $0<a<b<a+b<c$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

01150

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)<f(b)$, 又设对一切 $x\in(a,b)$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$$

存在, 用 $g(x)$ 表示这一极限值. 试证: 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)\geqslant 0$. (南开大学)

(注意题目未假定导数存在)

01151

试证: @跟锦数学微信公众号

$$g(n,i)\equiv\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k k^i=\begin{cases}0, & 0\leqslant i\leqslant n-1\\ (-1)^n n!, & i=n\end{cases}, \quad n=1,2,\cdots.$$

01152

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的 C^1 函数. 如果 f 满足以下条件: @跟锦数学微信公众号

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(2x),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

证明: f 恒等于零.

01153

若函数 $p(t)$ 在 $[0,\infty)$ 连续, 且当 $t\to+\infty$ 时, $p(t)=o(t^N)$ (N 为正整数). 又 $\lambda<0$, 证明: 当 $t\to\infty$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\int_t^{\infty}p(\tau)\mathrm{e}^{\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau=o(t^{N+1})\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

(北京师范大学)

01154

设 $f\in C^{n+1}(\mathbb{R})$, 试证: 对 $\forall\ a\in\mathbb{R}$, @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]_{x=a}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

01155

试计算矩阵 $A=(\sin(\alpha_i+\alpha_j))_{n\times n}$ $(n\geqslant 2)$ 的行列式.

01156

[Schur酉三角化定理]任意复方阵都酉相似于某个上三角阵.

01157

[谱分解定理]任一正规矩阵都酉相似与一个对角矩阵, 即

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A^*A=AA^*$

$\Rightarrow$ 存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$, s.t. $U^*AU=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 其中 λ_i 是 A 的特征值.

01158

设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S:x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点.

$$A(a_1,a_2,0),B(b_1,b_2,0),C(c_1,c_2,0)$$

为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1,B_1 与 C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.

(2) 求点 A_1,B_1 与 C_1 的坐标.

(3) 给定点

$$A(1,-1,0),B(-1,1,0),C(1,1,0),$$

求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

01159

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}.$$

01160

设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx$ ($x \in \mathbb{R}^{2020}$) 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

01161

称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k, 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x),$$

且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

01162

设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_{n+2} = \psi\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), n \geqslant 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

01163

对于有界区间 $[a, b]$ 的划分 @跟锦数学微信公众号

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b,$$

其范数定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\|P\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}(x_{k+1} - x_k).$$

现设 $[a, b]$ 上的函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$ 使得对任何 $x, y \in [a, b]$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|,$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$s(f;P)=\sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}.$$

若 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$ 存在, 则称曲线 $y=f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f;P_n)$ 存在.

(2) 曲线 $y=f(x)$ 可求长.

01164

已知椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_0:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>b$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon=1$ 或 -1 平行于已知直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_\varepsilon:\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的的每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

01165

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{4}{3}.$$

01166

设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m\geqslant 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

01167

设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换, $\mathscr{E}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma=k\mathscr{E},k\in\mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1,\cdots,v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

01168

计算广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x\in[n,n+1)$ 时, $(x)=x-n$).

01169

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x\in[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{x^2-x^4}{2}.$$

证明: $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{10}$.

01170

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}$ 上所有 n 级矩阵构成的 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, f 是 V 上的线性变换, 证明: 若 f 保持矩阵的乘法运算, 即对任意 $A,B\in V$, @跟锦数学微信公众号

$$f(AB)=f(A)\cdot f(B).$$

则存在 n 级可逆矩阵 Q 使得对任意 $X\in V$, 有 $f(X)=Q^{-1}XQ$.

01171

试证: @跟锦数学微信公众号

$$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b),\forall\ a,b>0.$$

01172

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ \xi\in(a,b),\ \text{s.t. } f'(\xi)(\xi-a)=f(\xi)-f(a).$$

01173

设 H^{-1} 是 H_0^1 的对偶空间, 定义域为 $[0,1]$. 试证:

(1) $\{h\sin(2\pi hx);\ h>0\}$ 在 H^{-1} 中有界;

(2) 试求 $h\sin(2\pi hx)$ 在 H^{-1} 中的弱极限.

01174

已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$$

的秩是 2, 求参数 b, 并指出方程 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y,z)=4$$

表示什么曲面?

01175

试求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right),\quad x>0.$$

01176

无穷多个无穷小量相乘还是无穷小量么?

01177

设立体 Σ 由 $x^2+y^2=2z$ 与 $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成, 求 Σ 的体积与表面积.

01178

对任两酉阵 U,V, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\|A\|_F=\|UAV\|_F.$$

01179

设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, f 在 D 上连续且有偏导数. 如果在 D 上有 @跟锦数学微信公众号

$$f_x+f_y+f_z=f,\quad f|_{\partial D}=0\ (\partial D\text{ 记 }D\text{ 的边界}).$$

则 f 在 D 上恒等于 0.

01180

设 @跟锦数学微信公众号

$$\vec{F}=\left(a-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{bx}{y^2},-\frac{cxy}{z^2}\right),$$

其中 a,b,c 是三个常数.

(i) 问 a,b,c 取何值时, $\vec{F}$ 为有势场.

(ii) 当 $\vec{F}$ 为有势场时, 求出它的势函数.

01181

设 f 是从区间 $[0,1]$ 映到 $[0,1]$ 的函数, 其图像 @跟锦数学微信公众号

$$\{(x,f(x));\ x\in[0,1]\}$$

是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的闭子集. 证明: f 是连续函数.

01182

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n\sin^n x}$. (内蒙古大学)

01183

设矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_r & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 A 的秩为 r, 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组, $(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)b$.

01184

梁济自杀前问儿子梁漱溟：这个世界会好吗？

01185

设 @跟锦数学微信公众号

$$x_n=\sum_{k=1}^n\frac{k\sin^2 k}{n^2+k\sin^2 k}(n=1,2,\cdots).$$

求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

01186

在 $\mathbb{R}^4$ 中定义如下有界区域 Ω: @跟锦数学微信公众号

$$\Omega=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;\ |x|+|y|+\sqrt{z^2+w^2}\leqslant 1\right\}.$$

计算 Ω 的体积.

01187

设 $\{a_n\}$ 为数列, $S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$ 为部分和.

(1). 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$.

(2). 设 $\{S_n\}$ 有界, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(3). 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 时, 能否推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$? 若能, 给出证明; 若不能, 请构造反例.

01188

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$.

01189

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L x^2yz\,dx+(x^2+y^2)\,dy+(x+y+1)\,dz,$$

其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 和 $z=x^2+y^2+1$ 的交线, 从 z 轴正向看 L 是逆时针方向.

01190

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(0)|\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\,dx+\int_0^1|f''(x)|\,dx.$$

01191

[Erdös 对均值不等式的简单证明]设 $a_i>0\ (i=1,\cdots,n)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

01192

试证: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kz^{2^k}}{1+z^{2^k}}=\frac{z}{1-z},\ \forall\ z:\ |z|<1.$

01193

设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=f(1)=0$, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 xf(x)\,dx\right]^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1[f'(x)]^2\,dx,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 为常数.

01194

设 f 是 $[a,b]$ 上的可微凹函数, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=\alpha>0$, $f'(b)=\beta<0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

01195

试求 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$$

01196

已知球缺高为 h, 所在球半径为 R 的球缺体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$. 现有一球体: @跟锦数学微信公众号

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$$

被平面 $x+y+z=1$ 所截下的小球缺为 Ω, 记球缺上的球冠为 Σ, 方向指向球外, 求第二型曲面积分: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

01197

设 A,B 均为 n 阶实正交阵, 证明 $|\det(A+B)|\leqslant 2^n$.

01198

设 A,B 都是 n 阶矩阵, $AB=BA=0$, $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$. 证明: $\mathrm{r}(A+B)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

01199

设实对称矩阵 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式都大于 0, 但 $\det A=0$. 证明: A 半正定.

01200

设 V 为 n 维线性空间, J 为 n 阶矩阵, 满足 $J^n = 2^n E$. 令 @跟锦数学微信公众号

$$W = \{x \in V;\ Jx = 2x\},$$

证明: W 是 V 的线性子空间, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\dim W = \frac{\operatorname{tr} J}{2n} + \frac{\operatorname{tr} J^2}{2^2 n} + \cdots + \frac{\operatorname{tr} J^n}{2^n n}.$$

01201

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上可积, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

01202

极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - \sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1 - x^3} - 1} =$ ____.

01203

设函数 $f(x) = (x+1)^n \mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1) =$ ____.

01204

设 $y = f(x)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

确定的隐函数, 且满足 $f(1) = 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 ____.

01205

已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_.$$

01206

设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x\in U$, $f(x)\neq g(x)$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)=a>0,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\_\_\_\_.$$

01207

设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)},n\geqslant1.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

01208

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 且 $\xi\neq\eta$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[1+f'(\xi)]\,[1+f'(\eta)]=4.$$

01209

已知 @跟锦数学微信公众号

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

其中 f,φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) 当 $f=\varphi$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$$

时, 求 $f(y)$.

01210

计算 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_\Gamma |\sqrt{3}y-x|\,\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z,$$

曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

01211

证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(n)=\sum_{m=1}^n\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$.

01212

设 @跟锦数学微信公众号

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4)^n}\ (n\geqslant 1).$$

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p\geqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

01213

对速度 $u=(u_1,u_2,u_3)$, 其旋度定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\omega=\nabla\times u=(\partial_2u_3-\partial_3u_2,\partial_3u_1-\partial_1u_3,\partial_1u_2-\partial_2u_1).$$

而有公式 @跟锦数学微信公众号

$$\nabla\cdot u=0\Rightarrow\nabla\times[(u\cdot\nabla)u]=(u\cdot\nabla)\omega-(\omega\cdot\nabla)u.$$

01214

设 $A=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;n=1,2,\cdots\right\}$, $B=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1;n=1,2,\cdots\right\}$, 求 $\mathrm{int}A$, A', $\bar{A}$, $\mathrm{int}B$, B', $\bar{B}$.

01215

设 $f(x)=\begin{cases}x^3\mathrm{e}^{-x}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 Riemann 可积? 是否 Lebesgue 可积? (须说明理由), 若可积, 求出积分值.

01216

设 (X,ρ) 是距离空间, 证明: 当 $0<\alpha<1$ 时, $d(x,y)=[\rho(x,y)]^\alpha$, $x,y\in X$, 也是 X 上的距离.

01217

讨论 $x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & t\in[0,1/n)\\ 0, & t\in[1/n,1]\end{cases}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是否为 $C[0,1]$ 中的 Cauchy 列? 是否为 $L^1[0,1]$ 中的 Cauchy 列?

01218

设 $Ax=\left(\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\frac{1}{3}\xi_3,\cdots\right),\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in\ell^\infty$, ℓ^∞ 为有界数列空间, 证明算子 A 是 ℓ^∞ 到 ℓ^∞ 的有界线性算子, 并求 $\|A\|$.

01219

证明: 任何一个复矩阵可以表为两个对称矩阵的乘积, 且其中一个为可逆矩阵.

01220

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是一列内积空间, 令 @跟锦数学微信公众号

$$X=\left\{\{x_n\};x_n\in X_n,\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\},$$

当 $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ 时, 规定 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\},$$

α,β 是数, @跟锦数学微信公众号

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n,y_n\rangle.$$

证明 X 是内积空间.

01221

设 $K(x,t)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant t\\ t, & t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$, 映射 $T:C[0,1]\to C[0,1]$, 对 $\phi(t)\in C[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\phi(x)=k_0+\alpha\int_0^1K(x,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t,$$

k_0 和 α 是常数, 当 k_0 和 α 是何值时, T 是压缩映射.

01222

已知矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角线元素为负的上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$.

01223

H 为内积空间, $M,N\subset H$, L 是由 M 和 N 张成的线性空间, 证明 $L^{\perp}=M^{\perp}\cap N^{\perp}$.

01224

利用 Parseval 等式证明: 如果 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 f 和三角函数系 @跟锦数学微信公众号

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

中每个函数正交, 那么必有 $f(x)=0$.

01225

设二元函数 $z(x,y)$ 在上半平面 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);y>0\}$$

内具有具有连续偏导数, 且满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{6}$$

(1) 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\v=x+b\sqrt{y}\end{cases}$, $(a\neq b)$ 将上述方程 (6) 变换为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求 a,b 的值;
(2) 利用 (1) 的结果求方程 (6) 的通解.

01226

试证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n!\mathrm{e}\pi)=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2n!\mathrm{e}\pi)=2\pi$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[n\sin(2n!\mathrm{e}\pi)-2\pi]=-\dfrac{2\pi(2\pi^2+3)}{3}$.

01227

试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n\right]=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

01228

(1) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可微, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2};$$

(2) 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{n}{4}}n^{-\frac{n+1}{2}}\left(1^1\cdot 2^2\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

01229

试证: 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=A$, 则对任意固定的整数 n_0 都有 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n_0+n}|}=a.\ (\text{北京理工大学})$$

01230

证明: 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}c_n\leqslant c$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{1+|c_n|}\leqslant\frac{c}{1+|c|}.$$

01231

]给定正数列 $\{a_n\}$, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}.\ (\text{国外赛题})$$

01232

求解 Cauchy 问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x - u = 0, & -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}.$$

01233

证明 $\mathbb{R}$ 中的所有可测子集族 $\mathscr{M}$ 的基数为 $2^{\aleph}$, 其中 $\aleph$ 为连续基数.

01234

计算下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\dfrac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

01235

设 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是可微函数, 且存在 $L>0$, 使得 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant L|x-y|$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$. 试证: $[f'(x)]^2<2Lf(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

01236

设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 存在. 这里 L 是有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=L$.

01237

试求无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{1+n^3}\right)$.

01238

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$1=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证: $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4.$

01239

设 f 在 $[0,1]$ 上连续且递增, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant 2\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

01240

设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}, B=(E-A^*)^{-1}(E+A^*),$$

则 $|B-E|=$ ____.

01241

已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f &= x^{\mathrm{T}}Ax \\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3 \end{aligned}$$

的秩为 2, 且 1 是 A 的一个特征值, 求正交线性替换 $x=Qy$ 化二次型为标准形.

01242

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维向量空间的一组基, 线性变换 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}5&-6&-6\\1&-2&-2\\3&-6&-4\end{pmatrix}.$$

已知基 η_1,η_2,η_3 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

求

(1) 线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵;

(2) 是否存在一组基使得线性变换在该基下的矩阵为对角阵?

01243

设函数 $g(x)$ 非负连续, 且存在正数 a 使得

$$g(x)+a\int_{x-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t=A.$$

(1) 求证: $g(x)$ 可导;

(2) 令 $F(x)=\mathrm{e}^{ax}g(x)$, 证明 $F(x)$ 为增函数;

(3) 求证: $g(x)\geqslant A\mathrm{e}^{-a}$;

(4) 给出 $g(x)$ 恒为常数的一个充分条件.

01244

对任一实数 $\lambda>1$, 已 $f(\lambda)$ 表示方程 $x(1+\ln x)=\lambda$ 的实数根, 试证: $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\dfrac{f(\lambda)\ln\lambda}{\lambda}=1$.

01245

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微的凸函数, 试证: $f(x+f'(x))\geqslant f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

01246

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)$. 试证: $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, $\exists\ \xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)-\lambda[f'(\xi)]^2=0$.

01247

设 $a,b>0$, $x,c>1$, 试证: $x^{a^c}+x^{b^c}\geqslant 2x^{(ab)^{c/2}}$.

01248

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}$, 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

01249

设 $-1<a_0<1$, $a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$, $(n>0)$. 问极限 $\lim_{n\to\infty} 4^n(1-a_n)$ 是否存在? 存在的话, 求出极限值.

01250

(1) 计算 Fibonacci 数列 F_n 的通项, 其中 $F_1=F_2=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. (2) 证明: $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ $(n\geqslant 2)$. (3) 试求 $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$. (4) 试求 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{F_n^2}\right]$.

01251

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 三阶可导, 且 $f'''(x)\geqslant 0$, $\forall\ x\in[0,1]$; $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 试证:

$$10\int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x+6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 15\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

01252

设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, 又存在常数 M, 使得在 $[a,b]$ 上恒有 $|f''(x)|\leqslant M$, 试证: 在 $[a,b]$ 上恒有 $|f(x)|\leqslant\frac{M}{16}(b-a)^2$.

01253

设 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, 试证: $P_{2n+1}(x)$ 有唯一实根.

01254

求 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t}{\ln x}$.

01255

(1) 求 $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^1|\alpha x-1|\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上的最小值. (2) 设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant\sqrt{2}+1$.

01256

计算二重积分: $\displaystyle I=\iint_D\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中积分区域由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

01257

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\frac{f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$, 需要证明.

01258

求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

01259

求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\tan^2 x-(\mathrm{e}^x-1)^5}$.

01260

(1) 用极限定义叙述 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$. (2) 证明 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{x}+1}\neq+\infty$.

01261

求 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{Rx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半球面的上侧, R 为一常数.

第五章　大学生数学竞赛试题

Contents

第01届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (15 分) 求经过三平行直线 @跟锦数学微信公众号

$$L_1: x=y=z, L_2: x-1=y=z+1, L_3: x=y+1=z-1$$

的圆柱面的方程.

2. (20 分) 设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, @跟锦数学微信公众号

$$F=\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

(1) 假设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

若 $AF=FA$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E.$$

(2) 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间 @跟锦数学微信公众号

$$C(F)=\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}; FX=XF\}$$

的维数.

3. (15 分) 假设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 $(n>0)$, f,g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg-gf=f$, 证明: f 的特征值都是 0, 且 f,g 有公共特征向量.

4. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并没在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)|\leqslant M$.

(1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2) 记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导, 为什么?

5. (10 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 \mathrm{d}t,$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

6. (15 分) $f(x,y)$ 是 $\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx}+f''_{yy}=x^2y^2,$$

计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'_x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

7. (15 分) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0,f(0))$, 与点 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (每小题 5 分, 共 20 分).

(1) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{D}\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{\qquad},$$

其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2,$$

则 $f(x)=\underline{\qquad}$.

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 $\underline{\qquad}$.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f'\neq 1$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\_\_\_\_.$$

2. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

4. (15 分) 已知平面区域 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\},$$

L 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx$;

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$.

5. (10 分) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$y_1=xe^x+e^{2x},$$
$$y_2=xe^x+e^{-x},$$
$$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$$

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

6. (10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y\geqslant 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

7. (15 分) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x\ (n=1,2,\cdots),$$

且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

8. (10 分) 求 $x\to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

第01届中国大学生数学竞赛数学类决赛试题

1. 填空题.

(1) 设 $\beta>\alpha>0$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x=$____.

(2) 若关于 x 的方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1\ (k>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一实数解, 则常数 $k=$____.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 由积分中值公式有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x-a)f(\xi)\ \ (a\leqslant\xi\leqslant x<b).$$

若导数 $f_+'(a)$ 存在且非零, 则 $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$ 的值等于____.

(4) 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=6$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\_\_\_\_.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$, 当自然数 $n\to\infty$ 时, $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

4. 设 $D=\{(x,y);x^2+y^2<1\}$, $f(x,y)$ 在 D 内连续, $g(x,y)$ 在 D 内连续有界, 且满足条件:

(1) 当 $x^2+y^2\to 1$ 时, $f(x,y)\to+\infty$;

(2) 在 D 中 f 与 g 有二阶偏导数, @跟锦数学微信公众号

$$f_{xx}''+f_{yy}''=\mathrm{e}^f,\quad g_{xx}''+g_{yy}''\geqslant\mathrm{e}^g.$$

证明: $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

5. 设 @跟锦数学微信公众号

$$R=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$R_\varepsilon=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,0\leqslant y\leqslant 1-\varepsilon\}.$$

考虑积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{R}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy},\quad I_{\varepsilon}=\iint\limits_{R_{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy},$$

定义 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}I_{\varepsilon}$.

(1) 证明: $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

(2) 利用变量替换 $\begin{cases}u=\frac{1}{2}(x+y)\\ v=\frac{1}{2}(y-x)\end{cases}$ 计算积分 I 的值, 并由此推出 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

6. 已知两直线的方程 @跟锦数学微信公众号

$$L:x=y=z,L':\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}.$$

(1) 问: 参数 a,b 满足什么条件时, L 与 L' 是异面直线?

(2) 当 L 与 L' 不重合时, 求 L' 绕 L 旋转所生成的旋转面 π 的方程, 并指出曲面 π 的类型.

7. 设 A,B 均为 n 阶半正定实对称矩阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$n-1\leqslant\operatorname{rank}(A)\leqslant n.$$

证明: 存在实可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 和 $C^{\mathrm{T}}BC$ 均为对角阵.

8. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $f_j:V\to\mathbb{C}\ (j=1,2)$ 是非零的线性函数, 且线性无关. 证明: 任意的 $\alpha\in V$ 都可表为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2),f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$

第01届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

(2) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, $a>0$.

(3) 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元, 而侧面的材料费为单位面积 b 元. 试给出最节省的设计方案: 即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少?

(4) 已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x},$$

求 $f(x)$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$, 其中 $a>0,b>0,c>0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义, 且在 $x=1$ 点可导, $f(1)=0,f'(1)=2$. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(1)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

证明:

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$;

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

6. 设 $n>1$ 为整数, @跟锦数学微信公众号

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t.$$

证明: 方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根.

7. 是否存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5?$$

若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x\in[0,+\infty)$, 当自然数 $n\to\infty$ 时, $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

第02届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题共 10 分) 设 $\varepsilon\in(0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$x_0=a, x_{n+1}=a+\varepsilon\sin x_n\ \ (n=0,1,2,\cdots).$$

证明 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 ξ 为方程$x-\varepsilon\sin x=a$ 的唯一根.

2. (本题共 15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$B=\begin{pmatrix}0&10&30\\0&0&2010\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

证明 $X^2=B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

3. (本题共 10 分) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x,y)$ 在 D 上连续. 注: 函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是$\forall\ \alpha\in(0,1)$ 以及 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\leqslant\alpha f(x_1,y_1)+(1-\alpha)f(x_2,y_2).$$

4. (本题共 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0, f'(1)=a$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=-a.$$

5. (本题共 15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化) 过以下九点:

$$A(1,0,0), B(1,1,2), C(1,-1,-2), D(3,0,0),$$
$$E(3,1,2), F(3,-2,-4), G(0,1,4), H(3,-1,-2), I(5,2\sqrt{2},8).$$

问 Σ 是哪一类曲面?

6. (本题 20 分) 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵 (未必对称), 对任一 n 维实向量

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), \alpha A\alpha^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

(这里 α^{T} 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β 使得 $\beta A\beta^{\mathrm{T}}=0$. 同时对任意 n 维实向量 x 和 y, 当 $xAy^{\mathrm{T}}\neq 0$ 是有

$$xAy^{\mathrm{T}}+yAx^{\mathrm{T}}\neq 0.$$

证明: 对任意 n 维实向量 v, 都有 $vA\beta^{\mathrm{T}}=0$.

7. (本题共 10 分) 设 f 在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, $0\leqslant f\leqslant 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\ [\alpha,\beta]\subset[0,1]$,

$$\left|\int_\alpha^\beta [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

8. (10 分) 已知 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足 $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=+\infty$, 且

$$\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=a<+\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty}[\varphi(t)]^2\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}[\varphi^{-1}(t)]^2\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.$$

第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本题共 5 小题, 每小题各 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设 $s>0$, 求 $I_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $g''_{xx}+g''_{yy}$.

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

的距离.

2. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0, 使得 $f(x_0)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

3. (本题共 15 分) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)},$$

其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与 @跟锦数学微信公众号

$$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 $t=1$ 处相切. 求函数 ψ.

4. (本题共 15 分) 设 $a_n>0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha\leqslant1$, 且 $S_n\to0\ (n\to\infty)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

5. (本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线, 均匀椭圆 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$$

(其中 $0<c<b<a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量;

(2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

6. (本题共 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(y)}{x^4+y^2}$$

的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0;$$

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

第02届中国大学生数学竞赛数学类决赛试题

1. (本题 15 分) 求出过原点且和椭球面 $4x^2+5y^2+6z^2=1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

2. (本题 15 分) 设 $0<f(x)<1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

3. (本题 15 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, @跟锦数学微信公众号

$$t_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n+k}+\cdots.$$

证明: $\lim_{n\to\infty} t_n=0$.

4. (本题 15 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换 @跟锦数学微信公众号

$$\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad \sigma_A(X) = AX - XA.$$

证明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.

5. (本题 20 分) 设连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < +\infty.$$

证明: 存在实常数 a 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - ax| < +\infty.$$

6. (本题 20 分) 设 $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \quad \forall\ X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型 @跟锦数学微信公众号

$$(-,-) : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

如下: $(X, Y) = \varphi(XY)$.

(1) 证明 $(-,-)$ 是非退化的, 即若 $(X, Y) = 0, \forall\ Y \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = 0$.

(2) 设 $A_1, \cdots, A_{n^2}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, $B_1, \cdots, B_{n^2}$ 是相应的对偶基, 即 @跟锦数学微信公众号

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

证明 $\sum\limits_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 是数量矩阵.

第02届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. (本题共 3 小题, 每小题各 5 分, 共 15 分) 计算下列各题 (要去写出重要步骤).

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

(3) 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}), \\ y=t-\arctan\mathrm{e}^t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. (本题共 10 分) 求方程 @跟锦数学微信公众号

$$(2x+y-4)\,\mathrm{d}x+(x+y-1)\,\mathrm{d}y=0$$

的通解.

3. (本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

4. (本题 17 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中 $a>b>c>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2,$$

Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

5. (本题 16 分) 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分 $(z\geqslant0)$ (取上侧), Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦. 计算:

(1) $\displaystyle\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}S$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S$.

6. (本题 12 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数, 且 $|f'(x)|<mf(x)$, 其中 $0<m<1$. 任取实数 a_0, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots.$$

证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

7. (本题 15 分) 是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(2)=1, |f'(x)|\leqslant 1, \left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 1?$$

请说明理由.

第03届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 已知四点 @跟锦数学微信公众号

$$A(1,2,7), B(4,3,3), C(5,-1,6), D(\sqrt{7},\sqrt{7},0).$$

试求过这四个点的球面方程.

2. (本题 10 分) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi)\leqslant\prod_{k=1}^n\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. (本题 15 分) 设 $\mathbb{F}^n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维列空间, $\sigma:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ 是一个线性变换. 若对 $\mathbb{F}$ 上的任何 n 阶方阵 A, @跟锦数学微信公众号

$$\sigma(A\alpha)=A\sigma(\alpha),\ (\forall\ \alpha\in\mathbb{F}^n),$$

证明: $\sigma=\lambda\mathscr{E}$, 其中 λ 是 $\mathbb{F}$ 中某个数, $\mathscr{E}$ 表示 $\mathbb{F}^n$ 上的恒等变换.

4. (本题 10 分) 对于 $\triangle ABC$, 求 @跟锦数学微信公众号

$$3\sin A+4\sin B+18\sin C$$

的最大值.

5. (本题 15 分) 对于任何实数 α, 求证: 存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

6. (本题 20 分) 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵, 即存在 m 使得 $C^m=0$.

7. (本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t=0.$$

证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=0$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t=0$.

第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(3) 求 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(4) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

2. (本题共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a,λ 为有限数, 求证:

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2) 如果存在正整数 p, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

3. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0.$$

求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0, 使得 $f'''(x_0)=3$.

4. (本题 15 分) 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 其线密度为 ρ. 在点 $(0,h)$ (其中 $h>0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

5. (本题共 15 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$. 求证: $x^2z'_x+y^2z'_y=0$ 和 @跟锦数学微信公众号

$$x^3z''_{xx}+xy(x+y)z''_{xy}+y^3z''_{yy}=0.$$

6. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, a,b,c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 记第一型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证: $I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\,\mathrm{d}u.$

第03届中国大学生数学竞赛数学类决赛试题

1. (本题 15 分) 设有空间中五点: @跟锦数学微信公众号

$$A(1,0,1),B(1,1,2),C(1,-1,-2),D(3,1,0),E(3,1,2).$$

试求过点 E 且与 A,B,C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

2. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两阶导数, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,\forall\ x\in[a,b].$$

3. (本题 10 分) 设 $k_0<k_1<\cdots<k_n$ 为给定的正整数, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为实参数. 指出函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\sin k_0x+A_1\sin k_1x+\cdots+A_n\sin k_nx$$

在 $[0,2\pi)$ 上零点个数的 (当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 变化时的) 最小可能值并加以证明.

4. (本题 10 分) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1, \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < +\infty, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 1.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 1.$

5. (本题 15 分) 设 A, B 分别是 3×2 和 2×3 实矩阵, 若 @跟锦数学微信公众号

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 BA.

6. (本题 20 分) 设 $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个矩阵集合, 称它们在 $\mathbb{F}$ 上相似: 如果存在 $\mathbb{F}$ 上与 $i\in I$ 无关的可逆矩阵 P 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^{-1}A_iP = B_i, \forall\ i\in I.$$

证明: 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上两个矩阵集合 $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_i\}_{i\in I}$, 如果它们在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似, 则它们在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上也相似.

7. (本题 15 分) 设 $F(x), G(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个非负单调递减函数, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[F(x)+G(x)\right] = 0.$$

(1) 证明: $\forall\ \varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\int_\varepsilon^{+\infty} xF(xt)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$$

(2) 若进一步有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left[F(t)-G(t)\right]\cos\frac{t}{n}\,\mathrm{d}t = 0.$$

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[F(t)-G(t)\right]\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$

第03届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. (本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

(3) 设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_x'^2 f_{yy}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+f_y'^2 f_{xx}''=0,$$

且 $f_y'\neq 0$, $y=y(x,z)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的函数. 求 y_{xx}''.

(4) 求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(5) 求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体的表面积.

2. (本题 13 分) 讨论 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性, 其中 α 是一个实常数.

3. (本题 13 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 并且满足: 存在 $M>0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant M, \forall\ x\in(-\infty,+\infty),\ (k=1,2,\cdots),$$

且 $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=0$, $(n=1,2,\cdots)$. 求证: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $f(x)\equiv 0$.

4. (本题共 16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分) 设 D 为椭圆形 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\ (a>b>0),$$

面密度为 ρ 的均质薄板; l 为通过椭圆焦点 $(-c,0)$ (其中 $c^2=a^2-b^2$) 垂直于薄板的旋转轴.

(1) 求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J;

(2) 对于固定的转动惯量, 讨论椭圆薄板面积的是否有最大值和最小值.

5. (本题 12 分) 设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F(xz-y,x-yz)=0$$

(其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数) 唯一确定, L 为正向单位圆周. 试求:

$$I=\oint_L (xz^2+2yz)\,\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\,\mathrm{d}x.$$

6. (本题共 16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分).

(1) 求解微分方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$

(2) 如 $y=f(x)$ 为上述方程的解, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

第04届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 设 Γ 为椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

2. (本题 15 分) 设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 共 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

3. (本题 10 分) 设 $f\in C^1[0,+\infty)$,

$$f(0)>0,f'(x)\geqslant 0,\forall\ x\in[0,+\infty).$$

若 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)+f'(x)}<+\infty$, 求证: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}<+\infty$.

4. (本题 10 分) 设 A,B,C 均为实 n 阶正定矩阵,

$$P(t)=At^2+Bt+C,f(t)=\det P(t),$$

其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 是$f(t)$ 的根, 证明: λ 的实部为负数.

5. (本题 10 分) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i,|x|<1,$$

n 为正整数. 求 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i$.

6. (本题 15 分) 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微, 其中 $\mathbb{R}$ 为实数集. 已知 $f(0)=f(1)$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f'(x)\neq 1$. 求证: 对任意正整数 n, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

7. (本题 25 分) 已知实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}.$$

证明:

(1) 矩阵方程 $AX=B$ 有解但 $BY=A$ 无解的充要条件是 $\begin{cases}a\neq 2,\\ b=\dfrac{4}{3};\end{cases}$

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $\begin{cases}a=3,\\ b=\dfrac{2}{3};\end{cases}$

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $\begin{cases}a<2,\\ b=3.\end{cases}$

第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本题共 5 小题, 每小题各 6 分, 共 30 分) 解答下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$;

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2, 使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$;

(3) 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$, 且 $u''_{xy}=0$, 确定常数 a 和 b, 使得函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $z''_{xy}-z'_x-z'_y+z=0$;

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微, $u(2)=1$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关, 求 $u(x)$;

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

2. (本题 10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

3. (本题 10 分) 求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001.

4. (本题 12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

5. (本题 12 分) 求最小实数 C, 使得对满足 $\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=1$ 的连续函数 $f(x)$, 都有 $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x\leqslant C$.

6. (本题 12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $t>0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的上半部分. 定义三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

7. (本题 14 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数, 那么

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

第04届中国大学生数学竞赛数学类决赛试题

1. (本题 15 分) 设 A 为正常数, 直线 L 与双曲线 $x^2-y^2=2$ $(x>0)$ 所围成的有限部分的面积为 A. 证明:

(1) 上述 L 被双曲线 $x^2-y^2=2$ $(x>0)$ 所截线段的中点的轨迹为双曲线;

(2) L 总是 (1) 中轨迹曲线的切线.

2. (本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f:[a,b]\to[a,b]$, 其中 $-\infty<a<b<\infty$;

(2) 存在常数 $0<L<1$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

设 $x_1\in[a,b]$, 令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在, 且 $f(x)=x$.

3. (本题 15 分) 设实 n 阶方阵 A 的每个元素的绝对值为 2. 证明: 当 $n\geqslant 3$ 时,

$$|A|\leqslant\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}n!.$$

4. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数. 对 $x_0\in(a,b)$, 若存在 x_0 的领域 U 使得对任意的 $x\in U\setminus\{x_0\}$ 都有 $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点; 类似地, 若存在 x_0 的领域 U 使得对任意的 $x\in U\setminus\{x_0\}$ 都有 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 求证: 若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的二次可微函数, 且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

5. (本题 20 分) 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 记

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix}x_1^2&x_2&x_3&x_4\\-x_2&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\-x_3&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\-x_4&a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

若 $|A|=-12$, A 的特征值的和为 1, 且 $(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 为 $(A^*-4I)x=0$ 的一个解. 试给出一正交变换 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

使得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准型.

6. (本题 20 分) 令 $\mathbb{R}$ 为实数域, n 为给定的正整数, A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合.证明: @跟锦数学微信公众号

$$\inf_{b\in\mathbb{R},\ c>0,\ P(x)\in A}\frac{1}{c^{n+1}}\int_b^{b+c}|P(x)|\,\mathrm{d}x>0.$$

第04届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. (25 分) 简答下列各题.

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right]$ $(a>1)$.

(2) 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv,$$

求 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

(3) 求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$, 使 $f(x)=\mathrm{e}^{-u(x)}$, 其中 $u=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(4) 计算不定积分 $\displaystyle\int x\arctan x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

(5) 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求此切平面的方程.

2. (15 分) 设曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma: z^2=x^2+y^2, 1\leqslant z\leqslant 2,$$

其面密度为常数 ρ. 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力 (记引力常数为 G).

3. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可导, @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

4. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)|<1$, 又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 试证在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

5. (15 分) 求二重积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|x^2+y^2-x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. (15 分) 若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 都是收敛的, 试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

第05届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点, 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周 (无滑动) 滚动一周, 这时,C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以 P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R, 记 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma:\ \mathbb{R}^2\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$$

为圆 C 的反演变换, 它将 $Q\in\mathbb{R}^2\setminus\{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 且满足 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ'}=R^2$. 求证: $\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

2. (本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $G(t)$ 分别是 @跟锦数学微信公众号

$$B(t)=(b_{ij}(t)),\quad b(t)=\begin{pmatrix}b_1(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{pmatrix},$$

其中 $b_{ij}(t)$ 和 $b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式,$i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)=\det B(t)$,$d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 代替 $B(t)$ 行列式中的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列

式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组. 试证明: $d(t), d_1(t), d_2(t), \cdots, d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

3. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶连续可微,$f'(0)=1, f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x, x\in(0,a)$. 令 $x_{n+1}=f(x_n), x_1\in(0,a)$.

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 求出其极限; 若不收敛, 请说明理由.

4. (本题 15 分) 设 $a>1, f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于 $+\infty$ 的正数列 $\{x_n\}$, 使得 $f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots$.

5. (本题 20 分) 设 $f:[-1,1\to\mathbb{R}$ 为偶函数,f 在 $[0,1]$ 上是增函数; 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即 @跟锦数学微信公众号

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y),\quad \forall\ x,y\in[0,1],\quad \forall\ t\in[0,1].$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. (本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体,E_{ij} 为 (i,j) 元素为 1, 其余元素为 0 的 n 阶方阵,$i,j=1,2,\cdots,n$. 记 Γ_r 表示秩为 r 的实方阵全体,$r=0,1,2,\cdots,n$; 并让 $\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(AB)=\phi(A)\cdot\phi(B),\quad \forall\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

证明:

(1) 对 $\forall\ A,B\in\Gamma_r$, 有 $\operatorname{rank}\phi(A)=\operatorname{rank}\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在 $r=1$ 的矩阵 W 使得 $\phi(W)=0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1},\quad \forall\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 解答下列各题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

(2) 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的.

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定.求 $y(x)$ 的极值.

(4) 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求点 A 的坐标.

2. (12 分) 计算定积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

3. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

4. (10 分) 设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

5. (14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2y^3-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(3z^3-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ, 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

6. (14 分) 设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

7. (14 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 弱收敛, 求其和.

第05届中国大学生数学竞赛数学类一二年级决赛试题

1. (本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. $P(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

2. (本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(1) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(2) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

3. (本题 15 分) 设 n 阶实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&\cdots&0\\ *&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ *&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ *&\ddots&\ddots&\ddots&b_{n-1}\\ *&\cdots&\cdots&\cdots&a_n\end{pmatrix}$$

有 n 个线性无关的特征向量, $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 均不为 0. 记 @跟锦数学微信公众号

$$W=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n};\ XA=AX\right\}.$$

证明: W 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 且 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 为其一组基, 其中 I 为 n 阶单位阵.

4. (本题 15 分) 设 $f(x,y)$ 为$[a,b]\times\mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$y'=f(x,y),\quad z'\leqslant f(x,z),\quad x\in[a,b].$$

已知 $z(a)\leqslant y(a)$. 求证: $z(x)\leqslant y(x)$, $x\in[a,b]$.

5. (20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$. 假设 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\int_0^\infty f^\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\infty f^\alpha(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right)^\beta,\quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

6. (20 分) 对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geqslant 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任何所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$ 都有 $d(f') \geqslant Cd(f)$.

第05届中国大学生数学竞赛数学类三四年级决赛试题

1. (本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$. $P(a,b,c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

2. (本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm{T}}Ax$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2\\ a & 0 & b & c\\ d & e & 0 & f\\ g & h & k & 4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(1) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(2) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

3. (本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$. 假设 $\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\displaystyle\int_0^{\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty}f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\beta},\quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

4. (本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 用 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n\geqslant 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任何所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$ 都有 $d(f')\geqslant Cd(f)$.

5. (常微分方程 15 分) 设 $f(x,y)$ 为$[a,b]\times\mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$y'=f(x,y),\quad z'\leqslant f(x,z),\quad x\in[a,b].$$

已知 $z(a) \leqslant y(a)$. 求证: $z(x) \leqslant y(x)$, $x \in [a, b]$.

6. (复变函数 15 分) 设 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 是单位圆盘. 非常值函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析, 且当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$. 求证: $f(D) = D$.

7. (实变函数 15 分) 设 E_k 是一列可测集, $f \in \mathcal{L}(\cup_{k=1}^{\infty} E_k)$.

(1) 令 $A = \varlimsup_{k\to\infty} E_k$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{k=n}^{\infty} E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $A = \varliminf_{k\to\infty} E_k$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\cap_{k=n}^{\infty} E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 如果 $\{E_k\}$ 是单调的, 求证: $\lim_{k\to\infty} E_k = E$ 存在, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. (微分几何 15 分) 设 Γ 是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线, l 是 Γ 的准线. 将 Γ 绕其准线 l 旋转一周, 得到旋转面 S. 求 S 的两个主曲率的比值.

9. (概率统计 15 分) 一只盒子中装有标上 1 至 N 的 N 张票券. 由放回地一张一张地抽取. 若我们想收集 r 张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的.

10. (抽象代数 15 分) 设群 $G = AB$, 其中 A, B 均为 G 的 Abel 群, 且 $AB = BA, \forall\ g_1, g_2 \in G$, 用 $[g_1, g_2]$ 表示换位子, 即 @跟锦数学微信公众号

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1},$$

G' 表示 G 的换位子群 (即由 G 的换位子所生成的子群). 证明:

(1) $\forall\ a, x \in A, \forall\ b, y \in B$ 有下式成立: @跟锦数学微信公众号

$$\left[x^{-1}, y^{-1}\right][a, b]\left[x^{-1}, y^{-1}\right]^{-1} = [a, b].$$

(2) G' 为 Abel 群.

11. (数值分析 15 分) 给定多项式序列 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \cdots . \end{aligned}$$

求证:

(1) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

(2) 设 $C[-1, 1]$ 是区间 $[-1, 1]$ 上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为 @跟锦数学微信公众号

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$$

则 $T_n(x)$ 是该内积空间的正交多项式, 即当 $n \neq m$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = 0.$$

(3) 设 $P(x)$ 是次数为 n 的首项系数为 1 的多项式. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\|P(x)\|_\infty \geqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

且等号成立当且仅当 @跟锦数学微信公众号

$$P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

这里 $\|P(x)\|_\infty = \max\limits_{x \in [-1,1]} |P(x)|$.

第05届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 解答下列各题 (本题共 28 分, 每小题 7 分)

(1) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且满足 $\displaystyle\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = 1$. 求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \int_0^1 (1 + x^2) f^2(x) \mathrm{d}x$$

取得最小值.

(3) 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$, 曲线

$$\Gamma:\left\{\begin{array}{l}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{array}\right.$$

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在xOy 平面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程.

(4) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$, 其中 a 为常数, 矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$, 其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $\operatorname{rank}(A+B)=3$, 试求常数 a 的值.

2. (12 分) 设 $f\in C^4(-\infty,+\infty)$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,$$

其中 θ 是与 x,h 无关的常数, 证明 f 是不超过三次的多项式.

3. (12 分) 设当 $x>-1$ 时, 可微函数 $f(x)$ 满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

且 $f(0)=1$. 试证: 当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立.

4. (10 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数. 若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$ 且 $f''_{xy}\leqslant A$. 证明 $I\leqslant\dfrac{A}{4}$.

5. (12 分) 设函数 $f(x)$ 连续可导, @跟锦数学微信公众号

$$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right),$$

邮箱曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面, 方向朝外. 记第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I_t=\iint\limits_{\Sigma_t}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

6. (12 分) 设 A,B 是二个 n 阶正定矩阵. 求证 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$.

7. (12 分) 假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 且 $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$. 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

第06届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 已知空间的两条直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_1:\ \frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1};\quad l_2:\ \frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}.$$

(1) 证明 l_1 和 l_2 异面;

(2) 求 l_1 和 l_2 的公垂线的标准方程;

(3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

2. (本题 15 分) 设 $f\in C[0,1]$ 是非负的严格递增函数.

(1) 证明: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n\in[0,1]$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[f(x_n)]^n=\int_0^1[f(x)]^n\,\mathrm{d}x.$$

(2) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

3. (本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法和纯量乘法均为通常的. $f_1,\cdots,f_n\in V$. 证明以下两条等价:

(1) $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关;

(2) $\exists\ a_1,\cdots,a_n\in[0,1]$ 使得 $\det[f_i(a_j)]\neq0$, 这里 det 表行列式.

4. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x),f'(x),f''(x)$ 都大于零. 假设存在正数 a,b 使得 $f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立.

(1) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$;

(2) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x)\leqslant cf(x)$.

(3) 求使上面不等式成立的最小常数 c.

5. (本题 20 分) 设 m 为给定的正整数. 证明: 对任何的正整数 n,l, 存在 m 阶方阵 X 使得 @跟锦数学微信公众号

$$X^n+X^l=I+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (本题 20 分) 设 $\alpha\in[0,1]$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n=0$, 其中 $k>0$.

第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分).

(1) 已知 $y_1=\mathrm{e}^x$ 和 $y_2=x\mathrm{e}^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是 ____.

(2) 设有曲面 $S: z=x^2+2y^2$ 和平面 $L: 2x+2y+z=0$, 则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 ____.

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ____.

(4) 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ____.

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$ ____.

2. (本题满分 12 分) 设 n 为正整数, 计算 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x.$$

3. (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且存在正常数 A, B 使得 $|f(x)| \leqslant A, |f''(x)| \leqslant B$. 证明: 对任意 $x \in [0,1]$, 有

$$|f'(x)| \leqslant 2A + \frac{B}{2}.$$

4. (本题满分 14 分)

(1) 设一球缺高为 h, 所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leqslant 12$$

被平面 $P: x + y + z = 6$ 所截的小球缺为 Ω. 记球缺上的球冠为 Σ, 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. (本题满分 15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x,$$

求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

6. (本题满分 15 分) 设

$$A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2},$$

求 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right)$.

第06届中国大学生数学竞赛数学类一二年级决赛试题

1. (本题 20 分, 每小题 5 分)

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型 $=$ ____.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和 $=$ ____.

(3) 计算第一型曲面积分的值: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}S=\underline{\qquad}.$$

(4) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\operatorname{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11}=\underline{\qquad}$.

2. (本题 15 分) 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p, 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值, a. 求该球面族的球心的轨迹.

3. (本题 15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}z_1&z_2\\-\bar{z}_2&\bar{z}_1\end{pmatrix};\ z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 表复数域. 试证: $\forall\ A\in\Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P\in\Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

4. (本题 20 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求最大常数 α 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty.$$

5. (本题 10 分) 设 $a(t),f(t)$ 为实连续函数, $\forall\ t\in\mathbb{R}$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$f(t)>0,a(t)\geqslant 1,\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\quad \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界.

6. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

第06届中国大学生数学竞赛数学类三四年级决赛试题

1. (本题 20 分, 每小题 5 分)

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型 $=$ ____.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的和 $=$ ____.

(3) 计算第一型曲面积分的值: @跟锦数学微信公众号

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}S = \underline{\qquad}.$$

(4) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\operatorname{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\cdots,n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式, 则有 $A_{11}=$ ____.

2. (本题 15 分) 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p, 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值, a. 求该球面族的球心的轨迹.

3. (本题 15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix};\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

其中 $\mathbb{C}$ 表复数域. 试证: $\forall\ A\in\Gamma$, A 的 Jordan 标准型 J_A 仍属于 Γ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P\in\Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

4. (本题 20 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求最大常数 α 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty.$$

5. (本题 10 分) 设 $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $\forall\ t\in\mathbb{R}$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$f(t)>0, a(t)\geqslant 1, \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty.$$

已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\quad \forall\ t\in\mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界.

6. (本题 10 分) 设 a,b 是两个不同的复数, 求满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$[f'(z)]^2=[f(z)-a]\cdot[f(z)-b]$$

的非零整函数 $f(z)$.

7. (本题 10 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为 K, 则对任意的可测集 $E\subset\mathbb{R}^1$, 均有 @跟锦数学微信公众号

$$m[f(E)]\leqslant K\cdot m(E).$$

8. (本题 10 分) 设三维空间的曲面 S 满足:

(1) $P_0=(0,0,-1)\in S$;

(2) 对任意 $P\in S$, $|\overrightarrow{OP}|\leqslant 1$, 其中 O 是原点.

证明: 曲面 S 在 P_0 的 Gauss 曲率 $K(P_0)\geqslant 1$.

9. (本题 10 分) 考虑求解线性方程组 $Ax=b$ 的如下迭代格式 @跟锦数学微信公众号

$$(\alpha D-C)x^{(k+1)}=[(\alpha-1)D+C^{\mathrm{T}}]x^{(k)}+b,$$

其中 D 为实对称正定矩阵, C 是满足 $C+C^{\mathrm{T}}=D-A$ 的实方阵, α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵, 且 $\alpha D-C$ 可逆, $\alpha>1/2$, 证明: 上述迭代格式对任何初始向量 $x^{(0)}$ 收敛.

10. (本题 10 分) 设 R 是 $[0,1]$ 上连续函数环, 其加法和普通的函数加法, 乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的极大左理想. 证明: $\forall\ f,g\in I$, f 与 g 在 $[0,1]$ 上必有公共的零点.

11. (本题 10 分) 设在国际市场上有我国某种出口商品每年的需求量 X (单位: 吨) 是随机变量, X 服从 $[100,200]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一顿, 可以为国家挣得外汇 3 万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求: 应组织多少货源, 才能使国家的收益最大?

第06届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 6 小题, 每小题 5 分).

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\,\mathrm{d}u}$ 的值是 ____.

(2) 设实数 $a\neq 0$, 微分方程

$$\begin{cases} y''(x)-a[y'(x)]^2=0\\ y(0)=0, y'(0)=-1\end{cases}$$

的解是 ____.

(3) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, 则 $A^{50}=$ ____.

(4) 不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=$ ____.

(5) 设曲线积分 $I=\displaystyle\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$, 其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时针, 则 $I=$ ____.

(6) 设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域, 其面积为 $A>0$, 函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续且 $f(x,y)>0$. 记

$$J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right)^n,$$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=$ ____.

2. (本题满分 12 分) 设 $l_j, j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n\geqslant 2$ 个方向向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$. 若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导数, 证明 $\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_j}=0$.

3. (本题满分 14 分) 设 A_1,A_2,B_1,B_2 均为 n 阶方阵, 其中 A_2,B_2 可逆. 证明: 存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$PA_iQ=B_i\quad(i=1,2)$$

成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似.

4. (本题满分 14 分) 设 $p>0, x_1=\frac{1}{4}$, 且

$$x_{n+1}^p=x_n+x_n^{2p}\ (n=1,2,\cdots),$$

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛且求和.

5. (本题满分 15 分)

(1) 将 $[-\pi,\pi)$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开成傅里叶级数, 并证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ 的值.

6. (本题满分 15 分) 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数, 若

$$I=\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在且有限, 则称广义积分 $\iint\limits_{R^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I.

(1) 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上非负连续函数. 若 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I, 证明极限

$$\lim_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\leqslant x,y\leqslant t}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

存在且等于 I.

(2) 设 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I, 其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于 0.

第07届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 v 为直线方向; 直线 L_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 w 为直线方向.

(1) 证明: 存在唯一点 $P\in L_1$ 和 $Q\in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2.

(2) 求 P 点和 Q 点坐标 (用 a, b, v, w 表示).

2. (本题 20 分) A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\operatorname{tr} A^i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$. 求 A 的行列式.

3. (本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解.

4. (本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}, \quad a_1 > 0.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - n)$ 存在.

5. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上连续函数, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = a < 1$. 构造函数列如下:

$$g_0(x) = h(x), \quad g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t) g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

求证: $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

6. (本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x) + a\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

为常数. 求证: $f(x)$ 为常数.

第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1} + \dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right) = \underline{\qquad}$.

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$$

所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 且 $xF_u+yF_v\neq 0$. 则

$$xz_x'+yz_y'=\underline{\qquad}.$$

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数)

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 $\underline{\qquad}$.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值是 $\underline{\qquad}$.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为

$$u(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t,$$

则 $u(x)$ 的初等函数表达式是 $\underline{\qquad}$.

2. (本题满分 12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程.

3. (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α,β, 使得对于 $\forall\ x\in(a,b)$, 有

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

4. (本题满分 14 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域, 及其和函数.

5. (本题满分 16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

试证:

(1) $\exists\ x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$;

(2) $\exists\ x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$.

6. (本题满分 16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且

$$f_{xx}''^2+2f_{xy}''^2+f_{yy}''^2\leqslant M.$$

若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

第07届中国大学生数学竞赛数学类一二年级决赛试题

1. (本题 20 分) 填空题 (每小题 5 分).

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1. 则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}|A|=$____.

(2) 令 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是____.

(3) 设 $D: x^2+2y^2\leqslant 2x+4y$, 则积分 $I=\iint\limits_D(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____.

(4) 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}^{2016}=I_2,$$

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X=$____.

2. (本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

3. (本题 15 分) 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵. 证明: $\operatorname{tr}\left((AB^2)\right)\leqslant\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)$.

4. (本题 20 分) 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi.$$

5. (本题 15 分) 设 $a(t),f(t)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $a(x)>0$. 已知 $\int_0^{\infty}a(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{a(x)}=0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$y'(x)+a(x)y(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

6. (本题 10 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$.

第07届中国大学生数学竞赛数学类三四年级决赛试题

1. (本题 20 分) 填空题 (每小题 5 分).

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1. 则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}|A|=$ ____.

(2) 令 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是____.

(3) 设 $D: x^2+2y^2\leqslant 2x+4y$, 则积分 $I=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____.

(4) 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足

$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}^{2016}=I_2,$$

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X=$ ____.

2. (本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

3. (本题 15 分) 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵. 证明: $\operatorname{tr}\left(\left(AB^2\right)\right)\leqslant \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)$.

4. (本题 20 分) 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证:

$$P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi.$$

5. (本题 10 分) 设 u_1,u_2,v_1,v_2 为群 G 中的元素, 满足

$$u_1v_1=v_1u_1=u_2v_2=v_2u_2.$$

若 u_1,u_2 的阶均为 8, v_1,v_2 的阶均为 13. 证明: u_1u_2 的阶为 4 及 v_1v_2 的阶为 13.

6. (本题 10 分) 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, E 是 L-可测的. 若 $mE > a > 0$, 则存在无内点的有界闭集 $F \subset E$, 使得 $m(F) = a$.

7. (本题 10 分) 设 $\gamma(s)$, $s \in [0, l]$ 是空间中一条光滑闭曲线, 以弧长为参数, 且曲率为 $k > 0$. 设 $\beta : [0, l] \to S^2$ 为单位球面上由 $\gamma(s)$ 的单位主法向量构成一条简单闭曲线 B. 证明: B 将球面分成面积相等的两个部分.

8. (本题 10 分) 实系数多项式 $p(x)$ 的模 1 范数定义为:

$$\|p\|_1 = \int_0^1 |p(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(1) 求二次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \leqslant x^3$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 成立, 且 $\left\|x^3 - p(x)\right\|_1$ 达到最小;

(2) 求三次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \leqslant x^4$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 成立, 且 $\left\|x^4 - p(x)\right\|_1$ 达到最小.

9. (本题 10 分) 设 $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant 1\}$ 是单位圆盘, $f(z)$ 在 D 上解析, $f(0) = 0$, 且在 D 上有 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant 1$. 求证: 在 D 上有

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant \frac{2|z|}{1 + |z|}.$$

10. (本题 10 分) 甲袋中有 $N - 1$ $(N > 1)$ 个白球和 1 个黑球, 乙袋中有 N 个白球, 每次从甲、乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中. 这样经过了 n 次, 求黑球出现在甲袋中的概率 p_n, 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

第07届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 填空题 (共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分).

(1) 微分方程 $y'' - (y')^3 = 0$ 的通解是 ____.

(2) 设 $D : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, 则

$$I = \iint\limits_D (x + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-4)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

的值是 ____.

(3) 设 $f(t)$ 二阶连续可导, 且 $f(t)\neq 0$, 若

$$\begin{cases} x=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \\ y=f(t), \end{cases}$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ____.

(4) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值, $f(x)$ 为多项式, 则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值为 ____.

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!\mathrm{e})]$ 的值为 ____.

2. (本题满分 14 分) 设 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数, 证明: 曲面

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$$

的所有切平面都交于点 (a,b,c).

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

4. (本题满分 14 分) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times p$ 矩阵, C 是 $p\times q$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B)\leqslant\operatorname{rank}(ABC),$$

其中 $\operatorname{rank}(X)$ 表示矩阵 X 的秩.

5. (本题满分 14 分) 设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数.

(1) 若 $n\geqslant 2$, 计算 I_n+I_{n-2};

(2) 设 p 为实数, 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

6. (本题 14 分) 设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数, 设上半球面

$$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

方向朝上. 若对任何点 (x_0, y_0, z_0) 和 $r > 0$, 第二型曲面积分

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

证明: $P'_x \equiv 0$.

第08届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光线照射 S, 其中的部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ. 证明: Γ 落在一张过椭圆中心的平面上.

2. (本题 15 分) 设 n 为奇数, A, B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 S_1, $B + J_B$ 的特征值集合为 S_2, 其中 J_A, J_B 分别表示 A 和 B 的 Jordan 标准形. 求证: $0 \in S_1 \cup S_2$.

3. (本题 20 分) 设 $A_1, \cdots, A_{2017}$ 为 2016 阶方阵. 证明关于 $x_1, \cdots, x_{2017}$ 的方程

$$\det\left(x_1 A_1 + \cdots + x_{2017} A_{2017}\right) = 0$$

至少有一组非零实数集, 其中 det 表示行列式.

4. (本题 20 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 中正连续函数, 满足

$$\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

设

$$f_{n+1}(x) = \frac{2f_n^2(x)}{f_n(x) + f_{n-1}(x)}, n = 1, 2, \cdots.$$

求证: 数列

$$a_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \cdots$$

单调递增且收敛.

5. (本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geqslant f^\alpha(x), x \in [0, +\infty).$$

6. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调递增函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leqslant f(x), g(x) \leqslant 1, \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}x.$$

求证: $\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$.

第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (满分 30 分, 每小题 6 分).

(1) 若 $f(x)$ 在点 $x = a$ 可导, 且 $f(a) \neq 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n = \underline{\qquad}.$$

(2) 若 $f(1) = 0, f'(1)$ 存在, 则极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x + \cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2} - 1)\sin x} = \underline{\qquad}.$$

(3) 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1) = 2$. 记 $z = f(\mathrm{e}^x y^2)$, 若 $z_x' = z$, 求 $f(x)$ 在 $x > 0$ 的表达式.

(4) 设 $f(x) = \mathrm{e}^x \sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0) = \underline{\qquad}$.

(5) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 平行与平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程为 $\underline{\qquad}$.

2. (满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = 0$, 且当 $x \in (0,1), 0 < f'(x) < 1$. 试证: 当 $a \in (0,1)$, @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^a f^3(x)\, \mathrm{d}x.$$

3. (满分 14 分) 某物体所在的空间区域为 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega: x^2 + y^2 + 2z^2 \leqslant x + y + 2z,$$

密度函数为 $x^2 + y^2 + z^2$, 求质量 @跟锦数学微信公众号

$$M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

4. (满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

5. (满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

6. (满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right).$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

第08届中国大学生数学竞赛数学类一二年级决赛试题

1. (本题 20 分) 填空题 (每小题 5 分).

(1) 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}=\underline{\qquad}.$$

(2) 设 a 为实数, 关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$$

有虚根的充分必要条件是 a 满足 $\underline{\qquad}$.

(3) 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_S \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$(a>0$ 为常数), 其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=\underline{\qquad}$.

(4) 记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall\ A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\bigcup\limits_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 $=$ ____.

2. (本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C. 问: C 为何种类型的曲线? 证明你的结论.

3. 证明题 (15 分) 设 n 阶方阵 A,B 满足:

$$\operatorname{rank}(ABA)=\operatorname{rank}(B).$$

证明: AB 与 BA 相似.

4. (本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall\ m,k\geqslant 0$ 成立

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty.$$

若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义

$$\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f}\in\mathscr{S}$, 且

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y,\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

5. (本题 15 分) 设 $n>1$ 为正整数. 令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

(1) 数列 $\{S_n\}$ 单调增且有界, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

6. (本题 15 分) 求证: 常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x,x\in[0,2\pi]$$

有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解.

第08届中国大学生数学竞赛数学类三四年级决赛试题

1. (本题 20 分) 填空题 (每小题 5 分).

(1) 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.$$

(2) 设 a 为实数, 关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$$

有虚根的充分必要条件是 a 满足 $\underline{\qquad}$.

(3) 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_S \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

($a>0$ 为常数), 其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=\underline{\qquad}$.

(4) 记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall\ A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\bigcup\limits_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 $=\underline{\qquad}$.

2. (本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C. 问: C 为何种类型的曲线? 证明你的结论.

3. 证明题 (15 分) 设 n 阶方阵 A,B 满足: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(ABA)=\operatorname{rank}(B).$$

证明: AB 与 BA 相似.

4. (本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall\ m,k\geqslant 0$ 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty.$$

若 $f \in \mathscr{S}$, 可定义 @跟锦数学微信公众号

$$\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y \quad (\forall\ x \in \mathbb{R})\,.$$

证明: $\hat{f} \in \mathscr{S}$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

5. (本题 10 分) 设 $(F, +, \cdot)$ 是特征为 p $(p \neq 0)$ 的域, 1 和 0 分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F, +)$ 到其乘法半群 $(\mathbb{F}, \cdot)$ 的同态, 即 $\forall\ x, y \in F$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

证明: φ 要么将 F 的所有元映照为 0, 要么将 F 的所有元映照为 1.

6. (本题 10 分)

(1) 设 E 是三分 Cantor 集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

(2) 设 $E \subset [0,1]$, 证明: $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差的重要条件是 E 的边界点集是有限集.

7. (本题 10 分) 设 S 为三维欧氏空间中的一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上. 证明: S 是平面的一部分.

8. (本题 10 分) 考虑求解一阶常微分方程初值问题 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

的 Runger-Kutta 法.

9. (本题 10 分) 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析, 并且 $|f(z)| \leqslant M$ $(M > 0)$, M 为常数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|f'(0)| \leqslant M - \frac{|f(0)|^2}{M}.$$

10. (本题 10 分) 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机本变量序列, 且 @跟锦数学微信公众号

$$P(X_n = 0) = P(X_n = a) = \frac{1}{2},$$

其中常数 $a>0$. 记

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}.$$

求 Y_n 的特征函数, 并证明其分布收敛于区间 $[0,a]$ 上的均匀分布.

第08届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 填空题 (本题 30 分, 每小题 6 分).

(1) 过单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为 ____.

(2) 设可微函数 $f(x,y)$ 满足

$$f_x'=-f,f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1,\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\cot y},$$

则 $f(x,y)=$ ____.

(3) 已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵, b 为 n 元列向量, 设

$$A=\begin{pmatrix}A&b\\b^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(B)=$ ____.

(4) $\sum_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为 ____.

(5) 曲线 $L_1:y=\frac{1}{3}x^2+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2:y=\frac{4}{3}x$ 旋转生成的旋转曲面的面积为 ____.

2. (本题 14 分) 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 证明:

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}.$$

3. (本题 14 分) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数, 且满足

$$0\leqslant f(x)\leqslant 1,\text{ 且 }\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

证明: 当 $0 \leqslant x \leqslant 13$ 时, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11,$$

并给出取等号的条件.

4. (本题 14 分) 设函数 $f(x, y, z)$ 在区域 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega = \left\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}$$

上具有连续的二阶偏导数, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(x f'_x + y f'_y + z f'_z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

5. (本题 14 分) 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = A + B$. 证明: 若存在正整数 k, 使 $A^k = 0$ (0 为零矩阵), 则行列式 $|B + 2017A| = |B|$.

6. (本题 14 分) 设 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$

(1) 证明: 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 存在;

(2) 记 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = C$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - C)$ 的敛散性.

第09届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C. 求该平面 P 的法线与 z- 轴的夹角.

2. (本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$$

收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1}?

3. 证明题 (15 分) 设 $\Gamma = \{W_1, W_2, \cdots, W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即, $\forall\ M, N \in \Gamma$, 有 $MN \in \Gamma$), 证明: $\sum\limits_{i=1}^{r} W_i = 0$ 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(W_i) = 0$, 其中 $\operatorname{tr}(W_i)$ 表示 W_i 的迹.

4. (本题 20 分) 给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 A (即, A 的转置 A^{T} 等于 $-A$), 记矩阵有序对集合 T 为 @跟锦数学微信公众号

$$T=\left\{(X,Y);\ X\in\mathbb{R}^{n\times n},\ Y\in\mathbb{R}^{n\times n},\ XY=aI+A\right\},$$

其中 I 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合. 证明: 任取 T 中两元: (X,Y) 和 (M,N), 必有 $XN+Y^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\neq 0$.

5. (本题 15 分) 设 $f(x)=\arctan x$, A 为常数. 若 @跟锦数学微信公众号

$$B=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right]$$

存在, 求 A,B.

6. (本题 20 分) 设 $f(x)=1-x^2+x^3$ $(x\in[0,1])$, 计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x}.$$

第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题共 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分).

(1) 已知可导函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1,$$

则 $f(x)=$ ____.

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ____.

(3) 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$u=x-cy,v=x+cy,$$

其中 c 为非零常数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}=\_\_\_\_.$$

(4) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ____.

(5) 不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=$____.

(6) 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V, 则三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_.$$

2. (本题 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α, 定义一元函数 @跟锦数学微信公众号

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha),$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$, 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

3. (本题 14 分) 设 Γ 为曲线 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z.$$

4. (本题 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

证明: $\forall\ a,b,a<b$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}.$$

5. (本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

第09届中国大学生数学竞赛数学类一二年级决赛试题

1. (本题 20 分, 每小题各 5 分) 填空题.

(1) 设实方阵 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{H}_{n+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_n&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{H}_n\end{pmatrix},n\geqslant 2,$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是与 $\boldsymbol{H}_n$ 通解的单位方阵, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{H}_4)=$ ____.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$ ____.

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases}x=\pi\sin\dfrac{t}{2},\\y=t-\sin t,\\z=\sin 2t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. 则第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z=\underline{\qquad}.$$

(4) 设二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix},$$

其中 $n>1,a\in\mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 ____.

2. (本题 15 分) 在空间直角坐标系下, 设有椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,a,b,c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0,y_0,z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ. 证明: 存在平面 Π, 使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

3. (本题 15 分) 设 A, B, C 均为 n 阶复方阵, 且满足

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB.$$

(1) 证明: C 是幂零方阵;

(2) 证明: A, B, C 同时相似于上三角阵;

(3) 若 $C \neq 0$, 求 n 的最小值.

4. (本题 20 分) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

5. (本题 15 分) 设 $\alpha \in (1,2)$, $(1-x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵, I 为 n 阶单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为

$$G(x) \equiv (g_{ij}(x)) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, 0 \leqslant x < 1.$$

试证对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 积分 $\displaystyle\int_0^1 g_{ij}(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

6. (本题 15 分) 有界连续函数 $g(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $1 < g(t) < 2$, $x(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ 是方程 $x''(t) = g(t)x$ 的单调正解. 求证: 存在常数 $C_2 > C_1 > 0$ 满足

$$C_1 x(t) < |x'(t)| < C_2 x(t), t \in \mathbb{R}.$$

第09届中国大学生数学竞赛数学类三四年级决赛试题

1. (本题 20 分, 每小题各 5 分) 填空题.

(1) 设实方阵

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & I \\ I & H_n \end{pmatrix}, n \geqslant 2,$$

其中 I 是与 H_n 通解的单位方阵, 则 $\operatorname{rank}(H_4) =$ ____.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\tan x) - \ln(1+\sin x)}{x^3} =$ ____.

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x=\pi\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t, \\ z=\sin 2t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. 则第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\cos y\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)+\cos z\,\mathrm{d}z=\_\_\_\_.$$

(4) 设二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵 A 为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

其中 $n>1, a\in\mathbb{R}$, 则 f 在正交变换下的标准形为 ____.

2. (本题 15 分) 在空间直角坐标系下, 设有椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0$$

及 S 外部一点 $A(x_0,y_0,z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ. 证明: 存在平面 Π, 使得交线 $S\cap\Sigma=S\cap\Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

3. (本题 15 分) 设 A,B,C 均为 n 阶复方阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$AB-BA=C, AC=CA, BC=CB.$$

(1) 证明: C 是幂零方阵;

(2) 证明: A,B,C 同时相似于上三角阵;

(3) 若 $C\neq 0$, 求 n 的最小值.

4. (本题 20 分) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

5. (本题 10 分) 设 G 为群, 且满足: @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in G,(xy)^2=(yx)^2.$$

证明: $\forall\ x,y\in G$, 元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过 2.

6. (本题 10 分) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为可测集, $m(E)<\infty$. 设 $f,f_k\in L^2(E)$, 在 E 上几乎处处有 $f_k\to f$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_E|f_k(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\int_E|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(t)-f(t)|^2\,\mathrm{d}t=0.$$

7. (本题 10 分) 已知椭圆柱面 S: @跟锦数学微信公众号

$$r(u,v)=\{a\cos u,b\sin u,v\},-\pi\leqslant u\leqslant\pi,-\infty<v<+\infty.$$

(1) 求 S 上任意测地线的方程;

(2) 设 $a=b$. 取 @跟锦数学微信公众号

$$P=(a,0,0),Q=(a\cos u_0,b\sin u_0,v_0)\ \ (-\pi<u_0<\pi,-\infty<v_0<+\infty).$$

写出 S 上连接 P,Q 两点的最短曲线的方程.

8. (本题 10 分) 推导求解线性方程组的共轭梯度法的计算格式, 并证明该格式经有限步迭代后收敛.

9. (本题 10 分) 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 在其边界上连续. 若在 $|z|=1$ 上 $|f(z)|=1$. 证明 $f(z)$ 为有理函数.

10. (本题 10 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量, 其有共同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$. 现对随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_nj$ 按大小顺序重新排列为 $X_{n_1}\leqslant X_{n2}\leqslant\cdots\leqslant X_{nn}$.

(1) 求随机变量 (X_{n1},X_{nn}) 的联合概率密度函数 $f_{1n}(x,y)$;

(2) 如果 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 求随机变量 $U=X_{nn}+X_{n1}$ 的密度函数 $f_U(u)$.

第09届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=$ ____.

(2) 设平面过原点和点 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 则此平面方程为 ____.

(3) 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y,$$

及 $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$ ____.

(4) 满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 @跟锦数学微信公众号

$$u(t)=\_\_\_\_.$$

(5) 设 a,b,c,d 是互不相同的正实数, x,y,z,w 是实数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$a^x=bcd,b^y=cda,c^z=dab,d^w=abc,$$

则行列式 $\begin{vmatrix}-x&1&1&1\\1&-y&1&1\\1&1&-z&1\\1&1&1&-w\end{vmatrix}=$ ____.

2. (本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续, 且存在两两互异的点 @跟锦数学微信公众号

$$x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1),$$

使得 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta,$$

证明: 对任意 $\lambda\in(\alpha,\beta)$, 存在互异的点 $x_5,x_6\in(0,1)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}.$$

3. (本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, 证明: 在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right] x_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).\end{aligned}$$

4. (本题满分 12 分) 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right].$$

5. (本题满分 12 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}, n \geqslant 2.$$

(1) 证明: 对任一非零 $x \in \mathbb{R}^n, H(x) > 0$;

(2) 求 $H(x)$ 满足条件 $x_n = 1$ 的最小值.

6. (本题满分 12 分) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 @跟锦数学微信公众号

$$D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \leqslant a^2\right\}$$

上具有一阶连续偏导数, 且满足 $f(x,y)|_{x^2+y^2=a^2} = a^2$, 以及 @跟锦数学微信公众号

$$\max_{(x,y)\in D}\left[f_x'^2 + f_y'^2\right] = a^2,$$

其中 $a > 0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{4}{3}\pi a^4.$$

7. (本题满分 12 分) 设 $0 < a_n < 1, n = 1,2,\cdots$, 且满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = q$ (有限或 $+\infty$).

(1) 证明: 当 $q > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(2) 讨论 $q = 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性并阐述理由.

第10届中国大学生数学竞赛数学类预赛试题

1. (本题 15 分) 在空间直角坐标系下, 设马鞍面 S 的方程为 $x^2-y^2=2z$. 设 σ 为平面 $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, 其中 α,β,γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使通过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ.

2. (本题 15 分) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实方阵, 满足

(1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$;

(2) 对每个 i $(i=1,\cdots,n)$, 有 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a$.

求

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

的规范形.

3. (本题 20 分) 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A,B 皆为整矩阵.

(1) 证明以下两条等价:

(i) A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵;

(ii) A 的行列式的绝对值为 1.

(2) 若又知

$$A,A-2B,A-4B,\cdots,A-2nB,A-2(n+1)B,\cdots,A-2(n+n)B$$

皆可逆, 且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵. 证明: $A+B$ 可逆.

4. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0$ $(\forall\ n\geqslant 0)$, 且存在常数 $C>0$ 使得 $|xf'(x)|\leqslant C|f(x)|$, $\forall\ x\in[0,1]$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$ $(\forall\ n\geqslant 0)$;

(2) 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$.

5. (本题 15 分) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0\ (n\geqslant 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n,\ n\geqslant 2.$$

求证:

(1) $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n\ (n\geqslant 2)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

6. (本题 15 分) 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha}$, 其中 $\alpha\in(0,1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分).

(1) 设 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\lim_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=$ ____.

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ \mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ____.

(3) $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=$ ____.

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ ____.

2. (本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f(x^2-y^2)$, 使得曲线

$$\int_L[y(2-f(x^2-y^2))]\,\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线.

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}.$$

4. (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是由 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9, z \geqslant 0$$

所围成的空心立体.

5. (本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leqslant M,$$

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

6. (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有

$$\ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. (本题满分 14 分) 已知 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是正项级数, 且

$$b_{k+1}-b_k \geqslant \delta > 0,\ k=1,2,\cdots,$$

δ 为一正常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$

收敛.

第10届中国大学生数学竞赛数学类一二年级决赛试题

1. (本题 20 分, 每小题各 5 分) 填空题.

(1) 设 A 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有 @跟锦数学微信公众号

$$A=\underline{\qquad}.$$

(2) 设 $y(x)\in C^1[0,1)$ 满足 $y(x)\in[0,\pi]$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{cases}\dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y\in(0,\pi],\\ 1, & y=0.\end{cases}$$

则 $y'(0)=\underline{\qquad}$.

(3) 设 $f(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\qquad}.$$

(4) 设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为 $\underline{\qquad}$.

2. (本题 15 分) 给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别于 l_1,l_2 共面, 且与平面 $z=0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程;

(2) 确定 S 是什么曲面.

3. (本题 15 分) 证明:任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 @跟锦数学微信公众号

$$A=A_0+A_1+A_2,$$

其中 $A_0=aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

4. (本题 20 分) 设 $\alpha>0$, $f(x)\in C^1[0,1]$, 且对任何非负整数 n, $f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C>0$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|x^\alpha f'(x)|\leqslant C|f(x)|\ \ (\forall\ x\in[0,1]).$$

证明:

(1) 若 $\alpha=1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv0$.

(2) 若 $\alpha>1$, 举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv0$ 可以不成立.

5. (本题 15 分) 设 $c \in (0,1)$, $x_1 \in (0,1)$ 且 @跟锦数学微信公众号

$$x_1 \neq c(1-x_1^2), x_{n+1}=c(1-x_n^2) \quad (n \geqslant 1).$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $c \in \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

6. (本题 15 分) 已知 $a(x), b(x), c(x) \in C(\mathbb{R})$, 方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$$

只有有限个 2π 周期解. 求它的 2π 周期解个数的最大值.

第10届中国大学生数学竞赛数学类三四年级决赛试题

1. (本题 20 分, 每小题各 5 分) 填空题.

(1) 设 A 为实对称方阵, $(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成其行向量的一个极大无关组. 则有 @跟锦数学微信公众号

$$A=\_\_\_\_.$$

(2) 设 $y(x) \in C^1[0,1)$ 满足 $y(x) \in [0,\pi]$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$x=\begin{cases} \dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0,\pi], \\ 1, & y=0. \end{cases}$$

则 $y'(0)=\_\_\_\_$.

(3) 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\_\_\_\_.$$

(4) 设 U 为 8 阶实正交方阵, U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 的 3×3 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为 $\_\_\_\_$.

2. (本题 15 分) 给定空间直角坐标系中的两条直线: l_1 为 z 轴, l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别于 l_1, l_2 共面, 且与平面 $z=0$ 平行.

(1) 求动直线 l 全体构成的曲面 S 的方程;

(2) 确定 S 是什么曲面.

3. (本题 15 分) 证明:任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 @跟锦数学微信公众号

$$A = A_0 + A_1 + A_2,$$

其中 $A_0 = aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

4. (本题 20 分) 设 $\alpha > 0, f(x) \in C^1[0,1]$, 且对任何非负整数 $n, f^{(n)}(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C > 0$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|x^\alpha f'(x)| \leqslant C|f(x)| \quad (\forall\ x \in [0,1])\,.$$

证明:

(1) 若 $\alpha = 1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 若 $\alpha > 1$, 举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 可以不成立.

5. (本题 10 分) 设 $(R, +, \cdot)$ 为含 $1 \neq 0$ 的结合环, $a, b \in R$. 若 $a + b = ba$, 且关于 x 的方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x^2 - (ax^2 + x^2a) + ax^2a = 1, \\ x + a - (ax + xa) + axa = 1 \end{cases}$$

在 R 中有解. 证明: $ab = ba$.

6. (本题 10 分) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测, 则 @跟锦数学微信公众号

$$G = \{(x, f(x))\,; x \in \mathbb{R}\}$$

是 2-维 Lebesgue 零测集.

7. (本题 10 分) 在空间直角坐标系中设椭圆抛物面 S 的方程为 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma(u,v) = \left(u, v, u^2 + \frac{1}{2}v^2\right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) 求 S 的所有脐点;

(2) 设 σ 为与脐点处切平面平行的平面, 它截 S 于曲线 C, 证明 C 是一个圆周.

8. (本题 10 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$\delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是区间 $[a,b]$ 的一个剖分. 用 $S[a,b]$ 表说满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合: 对任意 $s(x) \in S[a,b]$,

(1) $s(x)|_{[x_i,x_{i+1}]}$ 是三次多项式, $i=0,1,\cdots,n-1$.

(2) $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导.

证明:

(1) 对区间 $[a,b]$ 上的任意实函数 $f(x)$, 存在唯一的 $s(x)\in S[a,b]$ 满足: @跟锦数学微信公众号

$$s(x_i)=f(x_i), i=0,1,\cdots,n, s''(a)=s''(b)=0.$$

(2) 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 则对满足 (1) 的函数 $s(x)$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b |s''(x)|^2\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f''(x)|^2\ \mathrm{d}x.$$

且等号成立当且仅当 $s(x)=f(x)$.

9. (本题 10 分) 设 z_0 是复函数 $w=f(z)$ 的 n 阶极点. 试证明: 一定存在 $\rho>0$ 及 $R>0$, 使得对任意 @跟锦数学微信公众号

$$w\in\{w\in\mathbb{C};|w|>R\},$$

函数 $f(z)-w$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 中必有 n 个零点.

10. (本题 10 分) 设独立随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$P\left(X_n=\pm n^\theta\right)=\frac{1}{2},$$

其中 $\theta>0$ 是常数. 记 @跟锦数学微信公众号

$$S_n=\sum_{i=1}^n X_i.$$

(1) 当 $\theta<\frac{1}{2}$ 时, 证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0, 即对任意 $\varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n}\geqslant\varepsilon\right)=0;$$

(2) 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}}\xrightarrow{D} N(0,1),$$

其中 $\operatorname{Var}(S_n)$ 表示 S_n 的方差, $\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛.

第10届中国大学生数学竞赛非数学类决赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分).

(1) 设函数 @跟锦数学微信公众号

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续, 则 $a+b$ 的值为 ____.

(2) 设 $a>0$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=$ ____.

(3) 设曲线 L 是空间区域 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$$

的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\oint_L (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z\right|=\text{____}.$$

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 则 $z''_{xy}=$ ____.

(5) 已知二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\left(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2,$$

而 f 的规范形为 ____.

2. 设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1;$$

又设数列 $\{a_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$a_1\in(0,1), a_{n+1}=f(a_n)\ \ (n=1,2,\cdots),$$

严格单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant 1, f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty).$$

证明: 对于 $0<\alpha<\beta$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0.$$

4. 计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},$$

其中 $\Omega: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1.$

5. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$ 之和.

6. 设 A 是 n 阶幂零矩阵, 即满足 $A^2=0$. 证明: 若 A 的秩为 r, 且 $1\leqslant r<\dfrac{n}{2}$, 则存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵.

7. 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 问单调递减的正实数列, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n$ 收敛, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$$

第11届中国大学生数学竞赛数学A类预赛试题

1. (本题 15 分) 空间中有两个圆球面 B_1 和 B_2, B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D. 设 B 是含在 D 中的一个圆球, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

(1) (4 分) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面;

(2) (2 分) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点.

证明你的论断.

2. (本题 15 分) 设 $\alpha>0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0)=0$, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\xi f''(\xi)+(\alpha+1)f'(\xi)>\alpha f(\xi).$$

3. (本题 15 分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 $I-\bar{A}A$ 的特征多项式, 其中 $\bar{A}$ 表示 A 的共轭方阵. 证明: $p(x)$ 必为实系数多项式.

4. (本题 20 分) 已知 f_1 为实 n 元正定二次型. 令 @跟锦数学微信公众号

$$V=\{f;\ f \text{ 为实 } n \text{ 元二次型, 满足:对任何实数 } k \text{ 有 } kf+f_1 \text{ 属于恒号二次型}\}.$$

这里恒号二次型为 0 二次型, 正定二次型及负定二次型的总称. 证明: V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并求出这个向量空间的维数.

5. (本题 15 分) 设 $\delta>0$, $\alpha\in(0,1)$, 实数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_{n+1}=x_n\left(1-\frac{h_n}{n^\alpha}\right)+\frac{1}{n^{\alpha+\delta}},\quad n\geqslant 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 是有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

6. (本题 20 分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

(1) 证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步证明当 $x,y\geqslant 0$ 时成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)+f(y)\leqslant f(0)+f(x+y).$$

(2) 设 $n\geqslant 3$, 试确定集合 @跟锦数学微信公众号

$$E=\left\{\sum_{k=1}^n f(x_k);\ \sum_{k=1}^n x_k=0, x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

第11届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题

1. (本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线, 点 B 是它们公垂线段的中点. 点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动, 使得 $A_1B\perp A_2B$. 证明直线 A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面.

2. (本题 10 分) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2019})}.$$

3. (本题 15 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \ln(1+x_n),\ n = 1, 2, \cdots.$$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

4. (本题 15 分) 设 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基, 令 @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} = 0.$$

证明:

(1) 对 $i = 1, 2, \cdots, n+1$, @跟锦数学微信公众号

$$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \cdots, \varepsilon_n\}$$

都构成 V 的一组基;

(2) $\forall\ \alpha \in V$, 在 (1) 中点 $n+1$ 组基中, 闭存在一组基使得 α 在此基下的坐标分量均非负;

(3) 若 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

且 $|a_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 互不相同, 则在 (1) 中的 $n+1$ 组基中, 满足 (2) 中非负坐标表示的基是唯一的.

5. (本题 20 分) 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 若 $A^2 = I_n$ (I_n 表示单位矩阵), 则称 A 为对合矩阵. 试证:

(1) 若 A 是 n 阶对合矩阵, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{r}\,(I_n + A) + \mathrm{r}\,(I_n - A) = n;$$

(2) n 阶对合矩阵 A 一定可以对角化, 其相似对角形为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{r}\,(I_n + A)$.

(3) 若 A, B 均是 n 阶对合矩阵, 且 $AB = BA$, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

6. (本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续凹函数, 满足 $f(a) = 0, f(b) > 0$ 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处存在非零的右导数. 对 $n \geqslant 2$, 记 @跟锦数学微信公众号

$$S_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k x_k; \sum_{k=1}^{n} k f(x_k) = f(b), x_k \in [a, b] \right\}.$$

(1) 证明对 $\forall\ \alpha \in (0, f(b))$, 存在唯一 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) = \alpha$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup S_n - \inf S_n)$.

7. (本题 10 分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 a_n}{S_n^2}$ 收敛, 其中 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1) @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}\right) - \sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1 - \cos x}\right)} = \underline{\qquad}.$$

(2) 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2(x - y) = x^2$ 所确定, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \underline{\qquad}.$$

(3) 定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x}\, \mathrm{d}x = \underline{\qquad}.$$

(4) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}u(x, y) = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{3x2 - 2xy + 3y^2},$$

则 $u(x, y) = \underline{\qquad}$.

(5) 设 $a, b, c, \mu>0$, 曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

相切, 则 $\mu=$ ____.

2. (本题满分 14 分) 计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限的部分.

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$$

在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

4. (本题满分 14 分) 计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta.$$

5. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

证明: $c_n>0$, $(n \geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

6. (本题 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2},$$

且 $f(0) \leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x \in [0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leqslant M$.

第12届中国大学生数学竞赛数学A类预赛试题

1. (本题 15 分) 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点. @跟锦数学微信公众号

$$A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$$

为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1,B_1 与 C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.

(2) 求点 A_1,B_1 与 C_1 的坐标.

(3) 给定点

$$A(1,-1,0),B(-1,1,0),C(1,1,0),$$

求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

2. (本题 15 分) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}.$$

3. (本题 15 分) 设 A,B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax=Bx$ ($x\in\mathbb{R}^{2020}$) 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A,B 是否可能相似? 证明你的结论.

4. (本题 20 分) 称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k, 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得

$$f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x),$$

且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

5. (本题 15 分) 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2}=\psi\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right),n\geqslant 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

6. (本题 20 分) 对于有界区间 $[a,b]$ 的划分

$$P:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=b,$$

其范数定义为

$$\|P\|=\max_{0\leqslant k\leqslant n}(x_{k+1}-x_k).$$

现设 $[a,b]$ 上的函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M>0$ 使得对任何 $x,y\in[a,b]$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$s(f;P)=\sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}.$$

若 $\lim\limits_{\|P\|\to0^+}s(f;P)$ 存在, 则称曲线 $y=f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}s(f;P_n)$ 存在.

(2) 曲线 $y=f(x)$ 可求长.

第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题

1. (15 分) 已知椭球面 @跟锦数学微信公众号

$$\Sigma_0:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,a>b$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon=1$ 或 -1 平行于已知直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_\varepsilon:\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的的每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

2. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant3$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$1\leqslant\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{4}{3}.$$

3. (15 分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m\geqslant1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

4. (20 分) 设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换, $\mathscr{E}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma=k\mathscr{E},k\in\mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1,\cdots,v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

5. (15 分) 计算广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x\in[n,n+1)$ 时, $(x)=x-n$).

6. (20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x\in[0,1]$, @跟锦数学微信公众号

$$\int_{x^2}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{x^2-x^4}{2}.$$

证明: $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{10}$.

第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分, 共 5 小题).

(1) 极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$ ____.

(2) 设函数 $f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1)=$ ____.

(3) 设 $y=f(x)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

确定的隐函数, 且满足 $f(1)=1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ____.

(4) 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_.$$

(5) 设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x\in U$, $f(x)\neq g(x)$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)=a>0,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\_\_\_\_.$$

2. (本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n\geqslant 1.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$.

3. (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 且 $\xi\neq\eta$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$[1+f'(\xi)]\,[1+f'(\eta)]=4.$$

4. (本题满分 12 分) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

其中 f,φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) 当 $f=\varphi$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$$

时, 求 $f(y)$.

5. (本题满分 12 分) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\,\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z,$$

曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

6. (本题满分 12 分) 证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$.

7. (本题满分 14 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4)^n}\quad(n\geqslant 1).$$

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p\geqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

2020年江苏省高等数学竞赛本科1级A试题

1. 填空题 (每小题 4 分, 共 32 分).

(1) 设 $x=0$ 是函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$$

的可去间断点, 则常数 $a=$ ____.

(2) 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=1.$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$ ____.

(3) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\geqslant 1,\\ \mathrm{e}^{3x}-1, & x<1,\end{cases}$$

令 $y=f\left(f(x)\right)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=\_\_\_\_.$$

(4) 设曲线 $y=y(x)$ 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x-4y & =3t^2+2t, \\ \mathrm{e}^{y-1}+ty & =\cos t \end{cases}$$

确定, 则该曲线在 $t=0$ 处的切线的方程是 ____.

(5) 设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+x^{2020}$, 则 $f^{(2020)}(x)=$ ____.

(6) 方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-100}=0$$

的实根共有 ____ 个.

(7) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=x\arctan x+C,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\int \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x= \underline{\qquad}.$$

(8) 设曲线 $y=2\sqrt{x}$ 与直线 $y=kx$ 围成的平面图形为 D, 若 D 的面积为 $\frac{1}{3}$, 则 D 绕 y 轴旋转一周而成立体的体积 $V_y=$ ____.

2. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)\neq 0$.

(1) 证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b)(\xi-a)+f(a)(b-\xi).$$

(2) 对 (1) 中的 ξ, 求 $\lim\limits_{b\to a^+}\frac{\xi-a}{b-a}$.

3. (9 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\sqrt[n]{n}-1\right)$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

4. (9 分) 设点 $A(2,-1,1)$, 直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_1:\begin{cases} x+2z+7=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

直线 @跟锦数学微信公众号

$$l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{k} = \frac{z}{-1}.$$

是判断是否存在过点 A 的直线 l, 使它与两条已知直线 l_1, l_2 都相交? 如果存在, 请求出此直线的方程; 如果不存在, 请说明理由.

5. (10 分) 设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 满足等式 @跟锦数学微信公众号

$$6z''_{xx} - z''_{xy} - z''_{yy} = 0.$$

已知变换 $u = x - 3y, u = x + ay$ 把上述等式简化为 $z''_{uv} = 0$.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 写出 $z = f(x, y)$ 的表达式.

6. (10 分) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^{y^2}}{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}y.$$

7. (10 分) 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{y\,\mathrm{d}x - (x - y^2)\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

其中 L 是 $y = -\cos \pi x$ 上从点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段曲线.

8. (10 分) 求曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_\Sigma (x-1)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+1)^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2}$ 的上侧.

2020年浙江省高等数学(微积分)竞赛工科类试题

1. 计算题: (每小题 14 分, 满分 70 分).

(1) 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

(2) 求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int (1+x^n)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,\mathrm{d}x,$$

其中 n 为正整数.

(3) 求定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2+(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(4) 设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的线密度为 $\rho(x,y)=|xy|$, 求椭圆的质量.

(5) 求级数的和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n\cdot 2^n}$.

2. (满分 20 分) 设 $s(x)=\displaystyle\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t$.

(1) 求 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}$,

(2) 问 $y=s(x)$ 是否有渐近线, 并说明理由.

3. (满分 20 分) 设 $a>0$ 是常数, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a\int_0^z\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. (满分 20 分) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且 $\forall\ a>0, b>0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^{ab} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

求 $f(x)$ 的表达式.

5. (满分 20 分) 设连续函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足对 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(y)]=0,$$

其中 $f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right)$. 试问: 是否存在 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x\in(0,x_0), f(x)>x; \forall\ x\in(x_0,+\infty), f(x)<x.$$

2019年浙江省高等数学(微积分)竞赛工科类试题

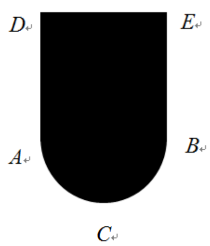
1. 计算题: (每小题 14 分, 满分 70 分).

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

(2) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

(4) 如图, 将一根钢丝折成两部分, 一部分围成一个矩形 $ABED$ 的三条边 AD、DE、EB, 另一部分围成一个半圆 ACB, 矩形和半圆的面积之为 1, 求钢丝长度的最小值.



(5) 定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n+1}}, & \dfrac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\dfrac{1}{2^n}\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型.

2. (满分 20 分) 求积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_D(5y^3+x^2+y^2-2x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D:1\leqslant(x-1)^2+y^2\leqslant 4$ 且 $x^2+y^2\leqslant 1$.

3. (满分 20 分) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的敛散性, 其中 $p>0$.

4. (满分 20 分) 设由方程 $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ $(*)$ 确定函数 $z=z(x,y)$. (1) 计算 $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (2) 如果以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为法向量的平面与 $(*)$ 交为圆, 求此法向量.

5. (满分 20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$$

2018年浙江省高等数学(微积分)竞赛工科类试题

1. 计算题: (每小题 14 分, 满分 70 分).

(1) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

(2) 求定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数, 求 $z''_{xy}(0,0)$.

(4) 计算 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为由不等式

$$\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$$

所确定的区域.

(5) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1]t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

2. (满分 20 分) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域及级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$ 的和.

3. (满分 20 分) 分析函数 $f(x,y)=(x^2+y^2-6y+10)\mathrm{e}^y$ 的极值问题.

4. (满分 20 分) 已知质线 $L:\begin{cases} z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的线密度 $\rho=|x^2+x-y^2-y|$, 求 L 的质量.

5. (满分 20 分) 已知 $a_n>0$, $a_1<1$, $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

2017年浙江省高等数学(微积分)竞赛工科类试题

1. 计算题 (每小题 14 分, 满分 70 分).

(1) 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt{\cos 2x}\cos x}{x-\ln(1+x)}.$$

(2) 求曲线 $C:\ y=x^2$ 与直线 $L:\ y=x$ 所围图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

(3) 计算 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\left\{(x,y);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和.

(5) 设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

2. (满分 20 分) 已知 $f(x)$ 连续且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求积分 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. (满分 20 分) 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{(x-1)\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2+y^2},$$

其中 L 是从 $(-2,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

4. (满分 20 分) 证明: $(\cos x)^p\leqslant\cos(px)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0<p<1$.

5. (满分 20 分) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续可导, $f(0)=0$. 证明:

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

2016年浙江省高等数学(微积分)竞赛工科类试题

1. 计算题: (每小题 14 分, 满分 70 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1+x}{\sin^2 x}}$.

(2) 求不定积分 $\int\dfrac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$ 的值.

(4) 求函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y,z)=\frac{z}{1+xy}+\frac{y}{1+xz}+\frac{x}{1+yz}$$

在 @跟锦数学微信公众号

$$V=\{(x,y,z);0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$$

的最大值.

(5) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2},$$

其中 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 求 α,β 的值.

2. (满分 20 分) 记 @跟锦数学微信公众号

$$y_n(x)=\cos(n\arccos x), n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 证明当 $n\neq m$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=0.$$

(2) 求 $c_n, n=0,1,2,\cdots$ 使 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{e}^{\arccos x}=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny_n(x).$$

3. (满分 20 分) 设曲面 S 为: @跟锦数学微信公众号

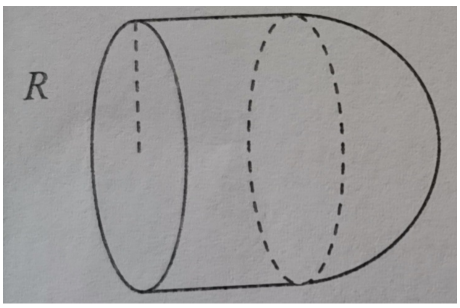
$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}+z^2=1, z\geqslant 0.$$

计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},$$

S 方向朝上.

4. (满分 20 分) 如图, 设一个均匀物体是由体积相同的一个半球和一个圆柱拼接而成, 圆柱的地面与半球的大圆面重合, 底面半径为 R, 求此物体的重心.



5. (满分 20 分) 已知 $P_n(x)$ 为 n 次实系数多项式, 有 n 个不同实根. 证明: $P_n(x)+P_n'(x)$ 有 n 个不同的实根.

第六章 2021年考研试题

Contents

全国全国硕士研究生招生考试2021年数学一试题

1. 选择题 (1-10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分.)

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ( ).

A. 连续且取得极大值

B. 连续且取得极小值

C. 可导且导数等于零

D. 可导且导数不为零

(2) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且

$$f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$$

则 $\mathrm{d}f(1,1)=($ $)$.

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

C. $\mathrm{d}y$

D. $-\mathrm{d}y$

(3) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+c^3$, 则 ( ).

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$

B. $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$

D. $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=($ $)$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

(5) 二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$$

的正惯性指数与负惯性指数依次为 ( ).

A. $2,0$

B. $1,1$

C. $2,1$

D. $1,2$

(6) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},$$

记 @跟锦数学微信公众号

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2,$$

若 β_1,β_2,β_3 两两正交, 则 l_1,l_2 依次为 ( ).

A. $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$

B. $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

(7) 设 A,B 为 n 阶实矩阵, 下列不成立的是 ( ).

A. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&A^{\mathrm{T}}A\end{pmatrix}=2\operatorname{rank}(A)$

B. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&AB\\0&A^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2\operatorname{rank}(A)$

C. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & BA \\ 0 & AA^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = 2\operatorname{rank}(A)$

D. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ BA & A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = 2\operatorname{rank}(A)$

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列为假命题的是 ( ).

A. 若 $P(A \mid B) = P(A)$, 则 $P(A \mid \bar{B}) = P(A)$.

B. 若 $P(A \mid B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A} \mid \bar{B}) > P(\bar{A})$.

C. 若 $P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B})$, 则 $P(A \mid B) > P(A)$.

D. 若 $P(A \mid A \cup B) > P(\bar{A} \mid A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

(9) 设 @跟锦数学微信公众号

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$$

为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的简单随机样本, 令 @跟锦数学微信公众号

$$\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y},$$

则 ( ).

A. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

B. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

C. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

D. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(10) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自样本 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题: @跟锦数学微信公众号

$$H_0: \mu \leqslant 10, H_1: \mu > 10,$$

$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geqslant 11\}$, 其中 $\bar{X} = \dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为 ( ).

A. $1 - \Phi(0.5)$.

B. $1 - \Phi(1)$.

C. $1 - \Phi(1.5)$.

D. $1 - \Phi(2)$.

2. 填空题 (11 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$ ____.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$$

确定, 则 $\displaystyle\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ____.

(3) 欧拉方程 @跟锦数学微信公众号

$$x^2y''+xy'-4y=0$$

满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 的解为 $y=$ ____.

(4) 设 Σ 为空间区域 @跟锦数学微信公众号

$$\{(x,y,z);x^2+4y^2\leqslant 4,0\leqslant z\leqslant 2\}$$

表面的外侧, 则曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\text{\_\_\_\_}.$$

(5) 设 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶矩阵, A_{ii} 为代数余子式, 若 A 的每行元素之和均为 2, 且 $|A|=3$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\text{\_\_\_\_}.$$

(6) 甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球, 选从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒, 再从已盒中任取一球, 令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ____.

3. 解答题 (17 22 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(1) (本题满分 10 分) 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

(2) (本题满分 12 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ (n=1,2,\cdots),$$

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(3) (本题满分 12 分) 已知曲线 @跟锦数学微信公众号

$$C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$$

求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

(4) (本题满分 12 分) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是有界单连通闭区域, @跟锦数学微信公众号

$$I(D)=\iint_D(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

取得最大值的积分区域记为 D_1.

(i) 求 $I(D_1)$ 的值;

(ii) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\partial D_1}\frac{(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\,\mathrm{d}x+(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2},$$

其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

(5) (本题满分 12 分) 已知 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}.$$

(i) 求正交矩阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角矩阵;

(ii) 求正定矩阵 C, 使得 $C^2=(a+3)E-A$.

(6) (本题满分 12 分) 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X, 较长一段段长度记为 Y, 令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(i) 求 X 的概率密度;

(ii) 求 Z 的概率密度;

(iii) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

北京师范大学2021年数学分析考研试题

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n\right)=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛? 并给出证明.

2. 设 $0<a<b<\infty$, 试证: 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号
$$be^a-ae^b=(1-\theta)e^2(b-a).$$

3. 设 $f(x)=\arctan x$, 且 @跟锦数学微信公众号
$$B=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right]$$
存在. 试求 A,B 的值.

4. (1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, $a,b\in\mathbb{R}$. 试证: $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $f(a+0),f(b-0)$ 都存在.

   (2) 若 $a\in\mathbb{R},b=+\infty$, 证明上述命题依然成立.

5. 设幂级数 @跟锦数学微信公众号
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)},$$
试求其收敛域, 并求 @跟锦数学微信公众号
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)2^n}.$$

6. 求曲线 @跟锦数学微信公众号
$$(x^2+y^2)^2=32,(x^2+y^2)^2=8xy$$
在第一象限围成的图形面积.

7. 计算第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号
$$\oint_c\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+8y^2},$$
其中 C 是以 $(1,0)$ 为圆心, 半径为 $R(\neq 1)$ 的圆, 取逆时针.

8. 判断积分 @跟锦数学微信公众号
$$f(t)=\int_0^1\frac{1}{x^t}\sin\frac{1}{x}\,dx$$
在 $0<t<2$ 的一致收敛性.

重庆大学2021年高等代数考研试题

1. 已知 n 阶矩阵 A 的顺序主子式都不为零, 证明: 存在 n 阶下三角矩阵 B, 使得 BA 为上三角矩阵.

2. 已知 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $h(x)$ 为首一多项式, 证明: @跟锦数学微信公众号
$$(f(x)h(x), g(x), h(x)) = (f(x), g(x))\, h(x).$$

3. 已知 @跟锦数学微信公众号
$$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
为 n 阶方阵, 且 A 的前 $n-1$ 个列向量线性无关, 后 $n-1$ 个列向量页线性无关, 记 @跟锦数学微信公众号
$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$
(1) 证明方程组 $AX = \beta$ 有无穷多解;
(2) 求方程组 $AX = \beta$ 的通解.

4. 已知矩阵 A 经过过渡矩阵 P 变成相似矩阵 C, 且 C 为对角矩阵, 证明矩阵 P 由 A 的特征向量构成.

5. 已知 A 为 n 阶矩阵,证明若 A 为幂零矩阵, 则对任意的正整数 k, 有 $\operatorname{tr}(A^k) = 0$; 反之, 若对任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$, 均有 $\operatorname{tr}(A^k) = 0$, 则 A 为幂零矩阵.

6. 解答如下问题:
(1) 已知 A 为实反对称矩阵, 证明 @跟锦数学微信公众号
$$Q = (E - A)(E + A)^{-1}$$
为正交矩阵;
(2) 已知 Q 为正交矩阵, 且 $E + Q$ 可逆, 证明存在实反对称矩阵 A, 使得 @跟锦数学微信公众号
$$Q = (E - A)(E + A)^{-1}.$$

7. 已知 V_1 是方程组 @跟锦数学微信公众号
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

的解空间, V_2 是方程组 @跟锦数学微信公众号

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间. 证明: $\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$.

8. 证明: 一个实二次型可以分解为两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是: 它的秩为 2 且符号差为 0, 或它的秩为 1.

9. 已知 A,B 分别为 $n\times m$ 与 $m\times n$ 阶矩阵.

(1) 证明: @跟锦数学微信公众号

$$|I_n-AB|=|I_m-BA|,$$

其中 I_n,I_m 分别为 n 阶与 m 阶单位矩阵;

(2) 计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1+x_1&a_1+x_2&\cdots&a_1+x_n\\a_2+x_1&1+a_2+x_2&\cdots&a_2+x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n+x_1&a_n+x_2&\cdots&1+a_n+x_n\end{vmatrix}.$$

10. 已知 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, $f(\lambda)$ 是它的特征多项式, 且 $f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, 其中 $(f_1(\lambda),f_2(lm))=1$, 记 @跟锦数学微信公众号

$$V_1=\operatorname{im}f_1(\varphi),V_2=\operatorname{im}f_2(\varphi).$$

证明:

(1) $V_1=\ker f_2(\varphi),V_2=\ker f_1(\varphi)$;

(2) V_1,V_2 为 φ-子空间, 且 V 是 V_1 与 V_2 的直和.

东南大学2021年高等代数考研试题

1. 已知方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}a&1&1&1&1\\1&a&1&1&1\\1&1&a&1&1\\1&1&1&a&1\\1&1&1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\b\\0\end{pmatrix}.$$

问此方程组何时有唯一解, 何时有无穷多组解, 并写出基础解系.

2. 定义复数域线性空间 $V=\mathbb{C}^{2\times 2}$ 上的变换 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{T}(X)=X+X^{\mathrm{T}}, \forall X\in V.$$

(1) 证明 $\mathscr{T}$ 为线性变换;

(2) 写出 $\mathscr{T}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 T;

(3) 求出 $\mathscr{T}$ 的特征值, 并写出对应特征子空间的基;

(4) $\mathscr{T}$ 是否可以对角化;

(5) 计算 T 的中心化子空间 @跟锦数学微信公众号

$$\{X\in V; TX=XT\}$$

的维数.

3. 已知复数域上的两个三阶矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\0&a&7\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&7\\0&b&c\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(1) 写出第一个矩阵的若尔当标准形;

(2) 若两矩阵相似, 求出 a, b, c.

4. 已知复数域上的多项式 $h(x)=f(x)g(x)$, $\mathscr{A}$ 是复数域上线性空间 V 上的线性变换, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$W=\ker(h(\mathscr{A})), W_1=\ker(f(\mathscr{A})), W_{=}\ker(g(\mathscr{A})).$$

求证:

(1) $W_1, W_2\subset W$;

(2) $W=W_1\oplus W_2$.

5. 已知两实对称矩阵 A, B 相似, 求证其在实数域上合同.

6. 已知 $s\times n$ 矩阵 A 列满秩, $n\times m$ 矩阵 B. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B).$$

7. 在复空间 V 上有变换 f, $\alpha \in V$, W 是 f 的不变子空间将. 若有多项式 $p(f)$, 使得 $p(f)\alpha \in W$, 则称此多项式为 α 到 W 的导向多项式. 将 α 的首一最高次数最低的多项式 $m(x)$ 称为极小 α 型多项式.

   (1) 求证: 对于任意导向多项式 $p(x)$, 都有 $m(x) \mid p(x)$;

   (2) 求证: 导向多项式存在且唯一;

   (3) 若 W 是真不变子空间, 则存在 $\alpha \notin W$, 多项式 $q(x)$ 使得 @跟锦数学微信公众号
   $$q(f)\alpha - c\alpha \in W,$$
   其中 c 为一常数.

8. 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 有 s 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 且 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 为其对应的特征向量, W 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 记 @跟锦数学微信公众号
   $$\eta = \eta_1 + \cdots + \eta_s \in W.$$
   求证: $\dim W \geqslant s$.

9. 在欧氏空间中有两线性变换, 满足 @跟锦数学微信公众号
   $$(f(\alpha), \beta) = (\alpha, g(\beta)).$$
   若 f 为正交变换, 求证 g 也为正交变换.

10. 已知矩阵 A, B 均为半正定矩阵, 求证存在可逆矩阵 C, 使得 A, B 同时合同对角化.

东南大学2021年数学分析考研试题

1. 计算极限 @跟锦数学微信公众号
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

2. 计算极限 @跟锦数学微信公众号
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \cos\sqrt{x} - 3}{x^2}.$$

3. 微分方程 $y + x\mathrm{e}^y = 1$ 在何处有解, 若有则求出它的解.

4. 求三元函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},x,y,z>0$$

的极值.

5. 计算机累次积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x.$$

6. 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_l \frac{x}{x^2+y^2-2}\mathrm{d}y+\frac{y}{x^2+y^2-2}\mathrm{d}x,$$

其中 $l:x^2+y^2=4$, 取逆时针方向.

7. 计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_V y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$V:x^2+z^2=1,0\leqslant y\leqslant 1;y=-\sqrt{1-x^2-z^2}.$$

8. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域与和函数.

9. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 是否在 $[0,1]$ 上一致收敛?

10. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且值域为 $[f(a),f(b)]$. 证明: 此函数一致连续.

11. 已知 $a_1>0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)\ (n=1,2,\cdots).$$

求证:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 有极限;

(2) 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 的敛散性.

12. 已知二阶连续混合偏导数 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

13. 已知连续函数 $f(x)\geqslant 0$ 满足 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证:

(1) 存在数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=+\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$;

(2) 在基础上, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 是否成立?

14. 已知连续函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

求证: 此函数在 $[0,1]$ 上至少有两个零点.

15. 用有限覆盖定理证明闭区间上的连续函数有最大值与最小值.

复旦大学2021年数学分析考研试题

1. 填空题.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{x}}=$____.

(2) 已知 $f(x)\in C[0,1]1$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=1, f(1)=2, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=9.$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\cos^n 4x\,\mathrm{d}x=\underline{\qquad}.$$

(3) 已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\alpha}(1-x^2)^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 求 α 的取值范围为____.

(4) 定积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3+4}=$____.

(5) 已知 x_0 是超越数, 并且数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=\frac{3-x_n}{x_n^2+3x_n-2}.$$

则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$ ____.

2. 证明: 闭区间不能写成两个无交闭集的并.

3. 求 a 的取值范围, 使得不等式

$$\ln(1+x)<ax+(1-a)\frac{x}{1+x}$$

恒成立.

4. 已知函数 f 存在二阶连续偏导数, $\Delta f\leqslant 0$,

$$F(r)=\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

求证: $F(r)$ 单调递增.

5. 复变函数题目.

6. 复变函数题目.

7. 复变函数题目.

8. 复变函数题目.

9. 实变函数题目.

10. 实变函数题目.

11. 常微分方程题目.

12. 常微分方程题目.

河北工业大学2021年数学分析考研试题

1. 填空题.

(1) 极限 $\lim_{x\to1}\frac{\arcsin(x-1)}{\ln x}=$ ____.

(2) 曲面 $z=2x^2-xy$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 ____.

(3) 函数 $f(x,y,z)=x^2yz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\{1,-1,1\}$ 的方向导数为 ____.

(4) 隐函数 $y=x+\arctan y$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____.

(5) 数列 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=(-1)^n+\frac{\sin n}{n},$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n=\_\_\_\_,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n=\_\_\_\_.$$

(6) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ 的收敛性是 ____.

2. 解答题.

(1) 求 $y=x\ln x$ 的 n 阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

(2) 设 $p>1$, 求函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=x^p+(1-x)^p\ \ (0\leqslant x\leqslant 1)$$

的极值, 单调区间和凹凸性.

(3) 求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $0<r<1,-\pi<x<\pi$.

(4) 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 的弧长.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$ 存在二阶连续偏导数, 试利用 @跟锦数学微信公众号

$$x=\xi-2\eta,y=2\xi+\eta$$

将 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

变换为 z 关于 ξ,η 的微分方程.

(6) 计算三重积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iiint_V yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$V: x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0.$$

(7) 计算第一类曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_L \arctan y\,\mathrm{d}s,$$

其中 L 是以 $O(0,0), A(1,1), B(-1,1)$ 为顶点的三角形.

(8) 计算第二类曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_L x\,\mathrm{d}y-y^2\,\mathrm{d}x,$$

其中 L 是以 $O(0,0), A(1,1), B(-1,1)$ 为顶点的三角形, 方向取逆时针.

(9) 求金属抛物面壳 @跟锦数学微信公众号

$$z=x^2+y^2\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$$

的质量, 其中密度函数 $\rho(x,y,z)=z$.

(10) 计算第二类曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是四分之一单位球面 @跟锦数学微信公众号

$$x^2+y^2+z^2=1\quad(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$$

的内侧.

(11) 证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos(x^4)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(12) 已知 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上可导的函数列, $c\in[a,b]$. 如果 $\{f_n(c)\}$ 收敛, 且 $\{f_n(x)\}$ 的导数列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$, 证明:

(i) $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某函数, 设为 $f(x)$;

(ii) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)=g(x)$.

河北工业大学2021年高等代数考研试题

1. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明 A^* 的前 $n-1$ 行前 $n-1$ 列构成的子式 (即 A^* 的 $n-1$ 阶顺序主子式) 的值为 $|A|^{n-2}a_{nn}$.

2. 设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵, 且 $AC=CA$. 证明: @跟锦数学微信公众号
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 求由基 @跟锦数学微信公众号
$$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$$
到基 @跟锦数学微信公众号
$$\beta_1=(-3,-6,-2)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,-3,-3)^{\mathrm{T}},\beta_3=(5,10,4)^{\mathrm{T}}$$
的过渡矩阵, 并求 $\mathbb{R}^3$ 中在这两组基下坐标相同的所有向量.

4. 设 A 为 n 阶实矩阵, A^2 为正定矩阵, B 为 n 阶实对称矩阵, 证明: A^2-B 正定的充要条件为 $A^{-1}BA^{-1}$ 的特征值均小于 1.

5. 设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 是线性空间 V 中两两不同的线性变换, 证明 V 中必存在向量 α, 使得 @跟锦数学微信公众号
$$\sigma_1(\alpha),\sigma_2(\alpha),\cdots,\sigma_s(\alpha)$$
也两两不同.

6. 已知 A 为 3 阶正交矩阵, 且 $|A|=1$. 证明存在正交矩阵 T, 使得 @跟锦数学微信公众号
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

7. 解答如下问题:

(1) 判断多项式 @跟锦数学微信公众号
$$f(x)=x^3+2x^2-x+1$$
在有理数域上是否可约;

(2) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为两两互异的整数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$$

在有理数域上不可约.

8. 设 σ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, σV 的维数称为 σ 的秩, $\sigma^{-1}(0)$ 的维数称为 σ 的零度. 证明: σ 的秩 $+\sigma$ 的零度 $=n$.

9. 已知实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) 求正交矩阵 P, 使得 PAP^{-1} 为对角矩阵;

(2) 记 V 是与所有与 A 可交换的实矩阵全体, 证明 V 是实数域上的一个线性空间, 并求 V 的维数.

湖南大学2021年数学分析考研试题

1. (15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), x_n = \frac{\pi}{2}\sin x_{n-1} \quad (n=1,2,\cdots).$$

试证: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. (15 分) 证明: $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

3. (20 分) 设 $f(x)$ 在点 a 处二阶可导, 且 $f''(a)\neq 0$. 证明: 当 h 充分小时成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,$$

其中 $0<\theta<1$ 具有性质 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$.

4. (17 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $[a,b]$ 上满足 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)| \geqslant m > 0.$$

证明: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

5. (18 分) 设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 若 @跟锦数学微信公众号

$$x_n \in [a,b], \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

6. (19 分) 证明: 在点 $(1,1)$ 的某一邻域内存在唯一的连续可微函数 $y=f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 及 @跟锦数学微信公众号

$$xf(x)+2\ln x+3\ln f(x)-1=0,$$

并求 $f'(x)$.

7. (15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta \ \ (h>0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数. 求 $F''(x)$.

8. (15 分) 求区域 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x, x+y\leqslant z\leqslant \mathrm{e}^{x+y}$$

所围立体的体积.

9. (15 分) 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oint_{L^+}(x-1)\,\mathrm{d}y-(y+1)\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}z$$

其中 L^+ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线, 沿 z 轴从上往下看为逆时针方向.

湖南大学2021年高等代数考研试题

1. (15 分) 求多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\frac{2}{3}x^5-x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2+1$$

在复数域中的标准分解式.

2. (15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$D_n(t)=\begin{vmatrix}1+t & t & \cdots & t\\ t & 2+t & \cdots & t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t & \cdots & t & n+t\end{vmatrix}.$$

计算 $D_n(t)$ 的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}t}(t)$.

3. (30 分) 对于数域 $\mathbb{K}$ 上的线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases}x_1+x_2+5x_4=1\\ x_1-x_2-6x_3-x_4=-2\\ 4x_1+x_2-\lambda x_3+6x_4=-3\\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_3=\mu\end{cases}.$$

(1) 当 λ,μ 满足什么条件时, 方程组无解;

(2) 当 λ,μ 满足什么条件时, 方程组有解, 并求出方程组的通解.

4. (15 分) 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $(n\geqslant 2)$. 求 A 的伴随矩阵 A^* 的秩 $\operatorname{rank}(A^*)$.

5. (30 分) 设 A,B 为 n 阶实矩阵, 即 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, 试证:

(1) 若 A 是正定矩阵, 则 A^{-1},A^* 均为正定矩阵;

(2) 若 A,B 均为正定矩阵, 则 $A+B$ 也是正定矩阵;

(3) 若 A,B 均为正定矩阵, 且 $AB=BA$, 则存在正交矩阵 P, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$P^{-1}AP,P^{-1}BP$$

均为对角阵;

(4) 若 A,B 均为正定矩阵, 则 AB 是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

6. (30 分) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间, V 分解成 k 维子空间 P 与 $n-k$ 维子空间 Q 的直和 $(1\leqslant k\leqslant n-1)$, 即 $V=P\oplus Q$. 记 P 到 Q 的全体线性映射为 $\operatorname{Hom}(P,Q)$. 定义 $T\in\operatorname{Hom}(P,Q)$ 在 V 中的图像为 @跟锦数学微信公众号

$$\Gamma(T)=\{p+Tp;p\in P\}.$$

证明:

(1) 对任意 $T \in \operatorname{Hom}(P, Q)$, $\Gamma(T)$ 均为 V 的 k 维子空间;

(2) V 的 k 维子空间 S 是某个 $T \in \operatorname{Hom}(P, Q)$ 的图像, 即 $S = \Gamma(T)$ 的充要条件是 $S \cap Q = \{0\}$.

7. (15 分) 设 V 是复数域上的 n 维向量空间, $\operatorname{End}(V)$ 表示 V 上的全体线性变换. 证明:

(1) 若 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \operatorname{End}(V)$, $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 则 $\ker \mathscr{A}, \operatorname{im} \mathscr{A}, \mathscr{A}$ 的特征子空间均为 $\mathscr{B}$ 的不变子空间;

(2) 若 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$, 则 $\ker f(\mathscr{A}), \operatorname{im} f(\mathscr{A}), f(\mathscr{A})$ 的特征子空间均为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间;

(3) 设 $f(x), f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ 满足 $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, 且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\ker f(\mathscr{A}) = \ker f_1(\mathscr{A}) \oplus \ker f_2(\mathscr{A}).$$

注: 对于 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\ker \mathscr{A} = \{v \in V; \mathscr{A} v = 0\},$$
$$\operatorname{im} \mathscr{A} = \{\mathscr{A} v; v \in V\}.$$

华东师范大学2021年高等代数考研试题

1. (15 分) 设 $\mathbb{F}$ 为数域, $A \in M^{m\times n}(\mathbb{F}), \beta \in M^{m\times 1}(\mathbb{F})$. 记 $\operatorname{rank}(A) = r$, 则线性方程组 $Ax = \beta$ 有多少个线性无关的解, 并说明理由.

2. (15 分) 设 $2n$ 阶方阵 @跟锦数学微信公众号

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

给出复线性空间 @跟锦数学微信公众号

$$SP_n = \left\{X \in M^{2n\times 2n}(\mathbb{C}); SX = -X^{\mathrm{T}} S\right\}$$

的一组基, 并计算其维数.

3. (15 分) 设 n 阶矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 中元素 $a_{ij}(t)$ 是实变量 t 的可微函数. 记 @跟锦数学微信公众号

$$A'(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right)_{n\times n}.$$

证明: 若对 $\forall\ t\in\mathbb{R},|A(t)|>0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$|A(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|A(t)|=\mathrm{tr}\,\left(A^{-1}(t)A'(t)\right).$$

4. (15 分) n 阶复矩阵 A,B 满足 $AB=BA$, 且 B 有 n 个不同的特征值, 证明: A 可对对角化.

5. (15 分) 设 c_1,c_2,c_3 是多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=2x^3-4x^2+6x-1$$

的三个复根. 求 @跟锦数学微信公众号

$$(c_1c_2+c_3^2)(c_2c_3+c_1^2)(c_1c_3+c_2^2).$$

6. (20 分) 在 $\mathbb{R}^2$ 上, @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c.$$

令 @跟锦数学微信公众号

$$A_f=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix},B_f=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}.$$

证明: 函数 f 在坐标变换 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

下, @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{tr}\,(A_f),\ \det\,(A_f),\ \det\,(B_f)$$

保持不变, 其中 A 是二阶正交矩阵.

7. (20 分) 设实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d>0.$$

证明: 一定存在 A 的特征向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, 其中 $x,y>0$.

8. (15 分) 设 6 阶复矩阵 A,B 是幂零矩阵, 且有相同的秩和最小多项式, 证明: A,B 相似.

9. (20 分) 设 A 是 n 阶实矩阵, B 是 n 阶实对称正定矩阵.

(1) 证明存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC+CB=A$.

(2) 证明对 (1) 中实矩阵 C , 有 $BC=CB$ 当且仅当 $AB=BA$.

华东师范大学2021年数学分析考研试题

1. 判断题 (每小题 6 分, 共 30 分).

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N>0,\ \text{s.t.}\ \forall\ n>N, |a_n-a_{2n}|<\varepsilon.$$

(2) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续, 且有 $f(0)=f(2)$, 则方程 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)-f(x+1)=0$$

在 $[0,1]$ 上有解.

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

(4) 若无穷积分 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(5) 若函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义, 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在, 则 $f'(0)$ 也存在.

2. 计算题 (每小题 9 分, 共 45 分).

(1) 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}.$$

(2) 假设二元函数 $u=f(x,y)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

令 @跟锦数学微信公众号

$$v=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right),x^2+y^2\neq 0.$$

试证: $v_{xx}+v_{yy}=0$.

(3) 计算第二类曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{x-y+1},$$

其中 L 为下半圆周 $x^2+y^2=2x$, 方向沿 x 增加的方向.

(4) 将函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 展开成余弦级数, 并证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(5) 设 $f(x,y)$ 在 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\}$$

上连续, 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\iint_D|f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{n}}.$$

3. 证明题 (每小题 15 分, 共 75 分).

(1) 若数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 且 $\{a_n\}$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

(2) 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t=\arctan x.$$

(3) 设函数 $f(u)$ 在闭区间 I 上连续, $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ N,\ \text{s.t.}\ \forall\ n>N,x\in[a,b],g_n(x)\in I.$$

试证: $\{f\left(g_n(x)\right)\}$ 一致收敛.

(4) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且存在常数 $r\in(0,1)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x\in[a,b],\exists\ y\in[a,b],\ \text{s.t. } |f(y)|\leqslant r|f(x)|.$$

试证: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x+1)-f(x)=f'(x),\quad \forall\ x\in[a,+\infty);\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=A.$$

试证: $f'(x)\equiv A,\forall\ x\in[a,+\infty)$.

华中科技大学2021年数学分析考研试题

1. 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to\infty}x\left[1+x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right].$$

2. 设 $F(u,v)$ 具有一阶偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由 @跟锦数学微信公众号

$$F(cx-az,cy-bz)=0$$

决定. 试求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设曲线 $x^2+y^2=1\ (x>0,y>0)$. 求该曲线上的一点 (x,y), 使得过该点的切线与 x 轴, y 轴所围成的三角形面积最小.

4. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L(x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y,$$

其中 L 是由 $A(1,1),B(2,5),C(3,2)$ 围成的三角形区域, 方向为逆时针.

5. 将 $f(x)=x(\pi-x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi[f(x)+f(\pi-x)]\,\mathrm{d}x.$$

并计算 $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\,\mathrm{d}x$.

7. 证明: 函数项级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$$

在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

8. 证明: 反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增连续. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ 0<k<1,\ \text{s.t.}\ \forall\ x\in[0,1],|f'(x)|\leqslant k.$$

数列 $\{x_n\}$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

$$x_0=0,x_{n+1}=f(x_n)\ \ (n=0,1,2,\cdots).$$

试证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

华中科技大学2021年高等代数考研试题

1. 若矩阵 A 的每个元素均为整数, 试证: $\dfrac{1}{2}$ 不是 A 的特征值.

2. 讨论方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\x_1+x_2+(a+1)x_3+5x_4=2\\x_2+ax_3+2x_4=3\\x_1-x_2+x_3+(a-1)x_4=b-1\end{cases}$$

解的情况.

3. 设 A,B 是同阶矩阵, 且 $AB=BA$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

4. 设 n 维线性空间 V 的一组基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 而 $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 是 V 的非平凡子空间. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_i\notin W_j\ \ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

5. 设正交变换 σ 的特征值都是实数, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$(\alpha, \sigma(\beta)) = (\sigma(\alpha), \beta).$$

6. 设 n 阶矩阵 A 满足 $\operatorname{tr}(A) = 0$. 证明: A 和一个主对角线上全为 0 的矩阵相似.

7. 对于正定矩阵 A, 及反对称矩阵 S. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\det(A + S) \geqslant \det(A),$$

并等号成立的条件.

8. 设 A 是 n 阶正定矩阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是非零向量. 试证:

(1) $A + xx^{\mathrm{T}}$ 可逆;

(2) $0 < x^{\mathrm{T}}(A + xx^{\mathrm{T}})^{-1}x < 1$.

华中农业大学2021年数学分析考研试题

1. 计算题.

(1) 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \arctan t^2 \,\mathrm{d}t}{\int_0^x (2t^2 + t^3 \cos t) \,\mathrm{d}t}.$$

(2) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D (x+y)\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由 $0 \leqslant x \pm y \leqslant \pi$ 所围成的区域.

2. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$I(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2}[f(x) - f(0)]\,\mathrm{d}x, h > 0.$$

试证:

(1) $\lim\limits_{h\to 0} I(h) = 0$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且存在常数 m,M, 使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{(b-a)^2}{24}m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{(b-a)^2}{24}M.$$

4. 设函数 $u_n(x)=n\mathrm{e}^{-nx},n\geqslant 1$.

(1) 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[\ln 2,\ln 3]$ 上一致收敛;

(2) 计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x$.

5. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,x>-1.$$

并由此计算:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

6. 若两曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases}3x^2+2y^2=2z+1\\x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0\end{cases}.$$

试求它们在点 $(1,1,2)$ 处的法线夹角, 并求交线在该点处的切线方程.

7. 若有以可求弧长的曲线 l, 且弧长为 L.

(1) 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在曲线 l 上连续, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_l P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant ML,$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$M=\max_{(x,y)\in l}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}.$$

(2) 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{R\to\infty}\left|\oint_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}\right|=0,$$

其中 C 为 $x^2+y^2=R^2$, 取正向.

南开大学2021年数学分析考研试题

1. (20 分) 已知数列 @跟锦数学微信公众号

$$a_1=-\frac{1}{2}, a_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{a_n^2}{2}\quad(n\geqslant 1).$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

2. (20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

$c\in(a,+\infty)$ 为 $f(x)$ 的最小值点, $a\leqslant f(c)<c<f(a)$. 试证; $f(f(x))$ 至少在两个点处取得最小值.

3. (30 分) 假设函数 $z=z(x,y), w=w(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 在变换 @跟锦数学微信公众号

$$x=uy, v=x, w=xz-y$$

下, 将 @跟锦数学微信公众号

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x^2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2(xz-y)$$

变为 $w=w(u,v)$ 的方程.

4. (20 分) 求第二型曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_L y\,\mathrm{d}x+2z\,\mathrm{d}y+3x\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, x 正向看去, 是顺时针方向.

5. (30 分) 已知不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C, |b|<1,$$

以及广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

计算含参量积分 @跟锦数学微信公众号

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\,\mathrm{d}x,$$

其中 a 为实数.

6. (15 分) 已知 n 为正整数, 讨论广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x^{12}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性.

7. (15 分) 已知 $r\in(0,1)$, 函数 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}x^rf'(x)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续.

南开大学2021年高等代数考研试题

1. (20 分) 计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & 0\\ a & -a & 0 & -1\\ 1 & 0 & a & -a\\ 0 & 1 & a & -a \end{vmatrix}.$$

2. (20 分) 设 A 为 n 阶方阵, 其中 $n\geqslant 3$, 且 A 第 i 行第 j 列元素为 $(i-j)^2$, 求 A 的秩.

3. (20 分) 设 A 为三阶实对称矩阵, 其特征值为 $-1,1$ (二重), 且 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1=(-1,2,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,4)^{\mathrm{T}}$$

是属于特征值 1 的特征向量.

(1) 求属于特征值 -1 的特征向量;

(2) 求矩阵 A.

4. (10 分) 设 A,B 为 n 阶实可逆方阵, 且 $A+B$ 也可逆. 如果 @跟锦数学微信公众号

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1},$$

郑密性: $|A|=|B|$.

5. (20 分) 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 线性方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x_1 & & - & 7x_3 & - & 8x_4 & = 0 \\ & x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = 0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & = 0 \\ & & & & & x_4 & = 0 \end{cases}$$

的解空间分别为 V 和W.

(1) 证明 $V+W$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的三维子空间;

(2) 求线性函数 l, 使得 $V+W=\{x\in\mathbb{R}^4; l(x)=0\}$.

6. (20 分) 给定 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 在线性空间 $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ 上定义线性变换 φ 如下: @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(X)=AX-XB,\forall\ X\in\mathbb{C}^{m\times n}.$$

如果 A,B 没有公共特征值, 证明: φ 是可逆的.

7. (15 分) 在实线性空间 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ 上定义二次型 @跟锦数学微信公众号

$$q(A)=\mathrm{tr}\,(A^2),\forall\ A\in V.$$

试计算 q 的正惯性指数和负惯性指数.

8. (15 分) 设 $\mathscr{T}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, U 和 W 分别是 $\mathscr{T}^n$ 的值域和核. 证明: V 是 U 与 W 的直和.

9. (10 分) 如果 n 阶方阵 $A_1,\cdots,A-m$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$A_i^2=0,1\leqslant i\leqslant m; A_iA_j=0,1\leqslant i\neq j\leqslant m.$$

求证: $m\leqslant n$.

四川大学2021年数学分析考研试题

1. 计算题.

(1) 求积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2021x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

(2) 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x.$$

(3) 求 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所成立体的体积.

(4) 求 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$$

在点 $(2,1,-2)$ 的切线方程.

(5) 计算第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma} x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}\geqslant 0$, 方向指向外侧.

2. 判断 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否一致收敛, 并给出其证明.

3. 若 $f(x),g(x)$ 都是黎曼可积函数, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 试问: 复合函数 $g(f(x))$ 在 $[0,1]$ 上是否黎曼可积.

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, 试将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 重排成 $\sum\limits_{n'=1}^{\infty} x'_n$, 使得 $\sum\limits_{n'=1}^{\infty} x'_n=+\infty$.

5. 将一米的绳子分成三段, 分别围成圆, 正方形与等边三角形, 问三者面积之和何时最小?

6. 讨论二重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

的敛散性.

7. 若 $x_1\in\mathbb{R}, x_{n+1}=x_n-x_n^3$. 讨论 $\{x_n\}$ 的敛散性.

8. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(1)=0,|f''(x)|\leqslant 1.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{8},|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

9. 求函数项级数 @跟锦数学微信公众号

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n+1}$$

的收敛域 D, 并讨论和函数 $S(x)$ 在 D 上的连续性.

10. 若 $f(r)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数, L 是一条不经过原点的简单闭曲线, 试问: @跟锦数学微信公众号

$$\oint_L f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)=0$$

是否一定成立? 并说明理由.

四川大学2021年高等代数考研试题

1. 若多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=x^6-2x^4+2x^2-1,$$

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 为其全部复数根, 试问:

(1) 将 $f(x)$ 化为 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式的乘积;

(2) 计算 $\sum\limits_{i=1}^{6}\alpha_i^{2021}$;

(3) 设 @跟锦数学微信公众号

$$g(x)=\prod_{i=1}^{6}(x-\alpha_i^{12})$$

为方阵 A 的特征多项式, 求 $|A^2+A+E_6|$, 其中 E_6 为六阶单位阵;

(4) 设 $\mathbb{K}$ 为包含 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 的最小数域, 求 $\mathbb{K}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的维数.

2. 设 $\mathbb{K}$ 为数域, $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ 为 $\mathbb{K}$ 上所有 $m\times n$ 阶矩阵组成的集合, 试问:

(1) 设 n 元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有解, A 的秩为 r, 证明: $AX=\beta$ 的解集秩为 $n-r+1$;

(2) 设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解, 且任意解都可以表示为 @跟锦数学微信公众号

$$(1,0,1,-1)^{\mathrm{T}},(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},(3,2,-1,-3)^{\mathrm{T}}$$

的线性组合, 求 A 的秩的取值范围;

(3) 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times t}(\mathbb{K})$, 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 A 的秩与分块矩阵 $(A \mid B)$ 的秩相等;

(4) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 A, B 的秩都为 1, 设 A 的一个行向量与 B 的一个行向量线性无关, 且 A 的一个列向量与 B 的一个列向量线性无关, 求 $A+B$ 的秩.

3. 设 V 为内疚空间.

(1) 若 U 为 V 的有限维子空间, $U^{\perp}$ 为 U 的正交补, 证明: $V = U \oplus U^{\perp}$;

(2) 设 U 为 V 的无限维子空间, 则 $V = U \oplus U^{\perp}$ 是否仍然成立? 并给出其证明.

4. 设实二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2bx_1x_3$$

的矩阵的全部特征值之和为 1, 乘积为 -48. 试求 a, b, 并用非退化线性变换将 f 化为标准形.

5. 设任意数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V_1, V_2, 且 $\mathrm{Hom}\,(V_1, V_2)$ 表示 V_1 到 V_2 的所有线性映射组成的线性空间. 若 U, V, W 为 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间, 维数分别为 l, m, n, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f \in \mathrm{Hom}\,(U, V), g \in \mathrm{Hom}\,(U, W), \ker f \subset \ker g.$$

(1) 试证: 存在 $h \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$, 使得 $g = h \circ f$, h 唯一当且仅当 f 是满射;

(2) 设 f 的像空间维数为 t, @跟锦数学微信公众号

$$S = \{h \in \mathrm{Hom}\,(V, W); g = h \circ f\},$$
$$T = \{\rho \in \mathrm{Hom}\,(V, W); \exists\ h_1, h_2 \in S,\ \text{s.t.}\ \rho = h_1 - h_2\}.$$

证明: T 为 $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ 的子空间, 并求其维数.

6. 设 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上 n $(n > 1)$ 维线性空间.

(1) 举出有无穷多个 V 的不变子空间的线性变换的例子;

(2) 若 $\mathscr{A}$ 为 V 上线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 有 n 个实特征值 (重根按重根计), $\mathscr{A}$ 有有限多个不变子空间, 写出 $\mathscr{A}$ 所有可能的 Jordan 标准形并说明;

(3) 若 $\mathscr{B}$ 为 V 上线性变换, 且 $\mathscr{B}$ 有 n 个实特征值 (重根按重数计), $\mathscr{B}$ 有有限多个不变子空间, 用 $\mathscr{B}$ 的初等因子给哦出 $\mathscr{B} = \mathscr{C}^2$ 成立的充要条件, 其中 $\mathscr{C}$ 为 V 上线性变换.

7. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, V^* 为 V 的对偶空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上线性变换, 对任意的 $g \in V^*$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{B}(g) = g \circ \mathscr{A}.$$

(1) 试证: $\mathscr{B}$ 为 V^* 上线性变换;

(2) 证明: $\mathscr{A}$ 为线性同构当且仅当 $\mathscr{B}$ 为线性同构;

(3) 设 $f \in V^*$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$f, \mathscr{B}(f), \mathscr{B}^2(f), \cdots, \mathscr{B}^{n-1}(f)$$

为 V^* 的基当且仅当 $\mathscr{A}$ 的任意非零不变子空间.

天津大学2021年数学分析考研试题

1. (8 分) 设 $0 < x_1 < 1$, @跟锦数学微信公众号

$$x_{n+1} = \sin x_n \ \ (n = 1, 2, \cdots).$$

证明: $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

2. (10 分) 计算极限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$.

3. (12 分) 把函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

展开成 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数, 并求出该傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上的和函数.

4. (12 分) 在曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ 上求一点, 使得其到平面 $x + 2y + 2z = 10$ 的距离最短, 并求出该最短距离.

5. (12 分) 设 Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 限制在 @跟锦数学微信公众号

$$\{(x, y, z); x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

的部分, 求曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$I = \iint_{\Sigma} \left[x^2 + (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)xyz\right] \mathrm{d}S.$$

6. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

7. (12 分) 设 $0<a<b<+\infty$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续, 记 @跟锦数学微信公众号

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x).$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b|f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=M.$$

8. (12 分) 设一元函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导, 并设 @跟锦数学微信公众号

$$u(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1^2+\cdots+x_n^2).$$

若存在常数 $c\neq 0$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}f'(t)=c$. 证明: u 在 $\mathbb{R}^n$ 上不一致连续.

9. (15 分) 解答如下问题:

(1) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{n(4n+1)}$ 的收敛域;

(2) 计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4n+1)}$ 的值.

10. (15 分) 解答如下问题:

(1) 证明广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(rx)\,\mathrm{d}x$$

关于 $r\in[0,+\infty)$ 一致收敛;

(2) 计算极限 $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}r\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(rx)\,\mathrm{d}x$.

11. (30 分) 证明如下结论.

(1) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为边界分段光滑的有界闭区域, 函数 u,v 在 $\bar{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial u}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, @跟锦数学微信公众号

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

(2) 设 Ω 及 u 满足第 1 问的条件, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega}\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S.$$

(3) 证明: 对任意非零的 $x\in\mathbb{R}^3$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\Delta\left(|x|^{-1}\right)=0;$$

对任意非零的 $x\in\mathbb{R}^2$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\Delta\left(\ln|x|\right)=0.$$

(4) 记单位球 @跟锦数学微信公众号

$$B=\left\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\},$$

设 u 在 B 上具有二阶连续偏导数, 且 $\Delta u=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$u(0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B}u\,\mathrm{d}S.$$

天津大学2021年高等代数考研试题

1. (15 分) 设 α,β,γ 为多项式 x^3-x+1 的三个根, 求首一三次多项式 $f(x)$, 使得其三个根分别为 @跟锦数学微信公众号

$$1+\alpha^2,1+\beta^2,1+\gamma^2.$$

2. (10 分) 计算行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1+x_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+x_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+x_n\end{vmatrix}.$$

3. (20 分) 设 A, B 分别为 $s \times n$ 与 $n \times m$ 阶矩阵. 解答如下问题:

(1) 证明: $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$ 当且仅当 $ABX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解;

(2) 设 C 为 $m \times r$ 矩阵, 证明: 若 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(ABC) = \operatorname{rank}(BC);$$

(3) 设 D 为 n 阶实方阵, D^{T} 表示 D 的转置, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}(DD^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(D^{\mathrm{T}}D) = \operatorname{rank}(D),$$

并举例说明当 D 为 n 阶复方阵时, 结论不成立.

4. (20 分) 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{T}$ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{T}$ 在基 e_2, e_3, e_1 下的矩阵;

(2) 求 $\mathscr{T}$ 在基 $e_1 - e_2, 2e_2, e_3$ 下的矩阵.

5. (15 分) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2021}$ 为方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2021}, \\ \beta_2 &= 2\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + 2^{2021}\alpha_{2021}, \\ \cdot &= \cdots, \\ \beta_{2021} &= 2021\alpha_1 + 2021^2\alpha_2 + \cdots + 2021^{2021}\alpha_{2021} \end{aligned}$$

也是 $AX = 0$ 的基础解系.

6. (20 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$A^2 + 4A + 2021I = 0,$$

其中 I 表示 n 阶单位矩阵.

(1) 证明: 对任意的实数 a, $A + aI$ 可逆;

(2) 求 $A+2I$ 的逆和 $(A+2I)^{2024}$.

7. (15 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 并且满足 $A^2=A$.

(1) 求 A 的特征值;

(2) 证明 A 与对角矩阵相似.

8. (15 分) 设 I 表示 n 阶单位矩阵.

(1) 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ 对应二次型的正负惯性指数;

(2) 设 A 为 n 阶实可逆矩阵, 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$ 对应二次型的正负惯性指数.

9. (10 分) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的两组向量, 并且对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant m$, 有 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)$. 证明:

(1) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的秩相同;

(2) 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的正交变换 O, 使得对任意的 $i=1,\cdots,m$, 都有 $O(\alpha_i)=\beta_i$.

10. (10 分) 设 $V_1,\cdots,V_s$ 是实数域上线性空间 V 的是 s 个真子空间, 证明: V 中至少有一个向量 v 不属于 $V_1,\cdots,V_s$ 中的任何一个.

同济大学2021年数学分析考研试题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

证明: $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

2. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases} \alpha\operatorname{sgn}x|x|^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-|x|^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

分别确定 α 的范围使得 $f(x)$

(1) 在 $\mathbb{R}$ 上有原函数;

(2) 在 $[-1,1]$ 上黎曼可积;

(3) 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

3. 设 $\rho>0$, $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\rho)$ 上单增, 证明: $f(x)$ 在 x_0 的左右极限存在, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in(x_0-\rho,x_0)}f(x),\ f(x_0+0)=\inf_{x\in(x_0,x_0+\rho)}f(x).$$

4. 证明: 开区间上的凸函数是连续的.

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 记 @跟锦数学微信公众号

$$M_k=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|,k=0,1,2.$$

证明: 若 $M_0,M_2<\infty$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2<\infty.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, $0<f(x)<1$. 证明: 若 $\int_0^\infty xf(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2<\int_0^\infty xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1}\right)$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$. 证明: $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 在 -1 处可导, 但在 1 处不可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 1^-}f'(x)=+\infty.$$

10. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $\lambda=a$ 和 $\lambda=b$ 时都收敛. 证明: $\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

武汉大学2021年数学分析考研试题

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

3. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

试证: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性与可微性.

4. 用条件极值方法证明: @跟锦数学微信公众号

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6, \forall\ a,b,c>0.$$

5. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ 的收敛区间与一致收敛区间, 并证明.

6. 计算二重积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D:|x|+|y|\leqslant 1$.

7. 计算第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oiint_\Sigma\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是 @跟锦数学微信公众号

$$V=\{(x,y,z);|x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2,|z|\leqslant 2\}$$

的边界, 取外侧.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续可微, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\leqslant 1.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x>1.$$

9. 设 @跟锦数学微信公众号

$$A_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}.$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln 2-A_n)=\frac{1}{4}$.

10. 当 $p>1$ 时, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数, 试证: $f(x)$ 在 (a,b) 内的左右导数都存在.

武汉大学2021年高等代数考研试题

1. 若 α_1,α_2 为三维向量, 且夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 试证: α_1,α_2 线性无挂.

2. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha-3$ 为三维向量, 且 @跟锦数学微信公众号

$$A=(\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}.$$

试证: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充要条件是 A 可逆.

3. 若 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, 求 @跟锦数学微信公众号

$$A^{2021}+A^{2019}+A.$$

4. 设 $B=2A$, 其中矩阵 A 的特征值为 $-\frac{1}{2},2$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$M=\begin{pmatrix}B&A\\A&B\end{pmatrix}.$$

求 $\det(M)$.

5. 设 α 为 n 维列向量, 且 $|\alpha|=3$, $A=\alpha\alpha^T$. 求 A 的所有特征值.

6. 若 $\mathscr{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为线性映射. 试证: $\mathscr{T}$ 是单射的充要条件是 $\mathscr{T}$ 是满射.

7. 若 C 为对称矩阵, I 为恒等矩阵, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$A=C^2+C+I,B=C^4+C+I.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\det(A+B)>\det A+\det B.$$

8. 若 $f(x)=\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

试问: 是否存在 $[a,b]$, 使得 $[a,b]$ 为 $f(x)$ 的值域.

西南大学2021年数学分析考研试题

1. 计算题 (3 个小题, 每小题 10 分).

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

(3) 设 $z=f(x^2y,xy)$, 且 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 完成下列各题 (3 个小题, 每小题 10 分).

(1) 求定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

(2) 求重积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);x+y\leqslant1,x\geqslant0,y\geqslant0\}.$$

(3) 求曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_L z\,\mathrm{d}s,$$

其中 L 为圆锥螺线 @跟锦数学微信公众号

$$x=t\cos t,y=t\sin t,z=t,t\in[0,\pi].$$

3. (15 分) 证明 $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

4. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 证明: 在 $[0,1]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

5. (15 分) 证明 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

6. (15 分) 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

7. (15 分) 设 $\{a_n\}$ 为非负单调递减数列, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛.

8. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $0 \leqslant f'(x) \leqslant f(x)$, $f(0) = 0$. 证明: 在 $[0,+\infty)$ 上, $f(x) \equiv 0$.

西南大学2021年高等代数考研试题

1. (20 分) 计算 $n(n \geqslant 3)$ 阶行列式 @跟锦数学微信公众号

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

2. (20 分) 用正交线性替换把二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

化为标准形, 并写出所作的正交替换.

3. (20 分) 设 $\mathbb{C}$ 为复数域, $a, b \in \mathbb{C}$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$V_a = \{f(x) \in \mathbb{C}[x]; f(a) = 0\},$$
$$V_b = \{f(x) \in \mathbb{C}[x]; f(b) = 0\}.$$

证明:

(1) V_a, V_b 为 $\mathbb{C}[x]$ 的线性子空间;

(2) V_a 与 V_b 同构.

4. (20 分) 设 $f(x)=x^2-6x+8\in\mathbb{Q}[x]$, V 为 $\mathbb{Q}$ 上的 n $(n\geqslant 2)$ 维线性空间, σ 为 V 上的一个非数乘的线性变换, 且 $f(\sigma)=\mathscr{O}$. 证明:

(1) σ 只有两个互不相同的特征值 λ_1,λ_2 (不考虑重数);

(2) $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}$, 其中 V_λ 表示特征子空间.

5. (20 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&3&2\\&&&3\end{pmatrix}.$$

(1) 求 A^n;

(2) 求 A^{-1};

(3) 求 A 的最小多项式.

6. (20 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$V=\{A;A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n);\lambda_i\in\mathbb{P}\}$$

为数域 $\mathbb{P}$ 上所有对角矩阵构成的集合, $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 证明:

(1) V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 并求其维数;

(2) @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

与 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{diag}(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n})$$

合同;

(3) @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

与 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{diag}(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n})$$

相似.

7. (15 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

为复数域上的多项式, P, A 为复数域上的 4 阶矩阵, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$P=\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

证明:

(1) $A=f(P)$;

(2) A 可逆的充要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$\left(f(x), x^4-1\right)=1.$$

8. (15 分) 设多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\cdots+a_nx^{p_n}$$

不可能有非零且重数大于 $n-1$ 的根, 其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 且 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 互不相同.

云南大学2021年数学分析考研试题

1. 填空题.

(1) 若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 个}}(x),$$

则 $f_n(x)=$____.

(2) 计算不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $z^3-3xyz=1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____.

(4) 若曲面 D 为 $x^2+y^2=2x$ 内部满足 $x\geqslant 1$ 的部分, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_.$$

(5) 过曲面 $z=x^2+y^2-1$ 上点 $(2,1,4)$ 的切平面方程为 $\_\_\_\_$.

(6) 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}+3(-1)^n\right]=\_\_\_\_.$$

2. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n\ \ (n=2,3,\cdots).$$

(1) 证明: $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内存在唯一实根 x_n;

(2) 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

试证: $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微.

4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$b>a>0, f(a)\neq f(b).$$

试证: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

5. 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x\ \ (b>a>0).$$

6. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$$

收敛.

7. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 当 p 为何值, $f(x,y)$ 在原点处连续;

(2) 当 p 为何值, $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 存在;

(3) 当 p 为何值, $f(x,y)$ 在原点处具有一阶连续偏导数.

8. 未有. 是一道补面后利用高斯公式的第二型曲面积分.

9. 若 $a>0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-a^2})}<\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x<\sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2})}.$$

浙江大学2021年数学分析考研试题参考解答

1. 计算题.

(1) 计算极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$

(2) 计算含参量积分 @跟锦数学微信公众号

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x, |a|<1.$$

(3) 计算第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S y(x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y^2+xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 为 $z=5-x^2-y^2, z\geqslant 1$ 的外侧.

(4) 求 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开, 并求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. (1) 叙述 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} f(x,y) \neq A$$

的精确定义.

(2) 按定义证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $f(a) > a, f(b) < b$. 试证: 存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c) = c$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. 试证: $f(x) \equiv 0$.

6. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, 0 < p_i < 1.$$

对任何实数 $x_1,\cdots,x_n$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \ln p_i) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{x_i}\right).$$

7. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 和为 A, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛于 B. 设 @跟锦数学微信公众号

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

求证: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n = AB$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且 $f(x) \in [m,M]$, $g(x)$ 在 $[m,M]$ 上连续. 试证: $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

9. 设 f 是 n 元函数, 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0;\delta_0)$ 内二阶可微, $\nabla f(x_0)=0$, 且对于任意的单位列向量 $a\in\mathbb{R}^n$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$(a\cdot\nabla)^2 f(x_0)>0.$$

试证明:

(1) 存在 $\delta\in(0,\delta_0)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$((x-x_0)\cdot\nabla)\,f(x)>0$$

对一切 $x\in U(x_0;\delta)\setminus\{x_0\}$ 都成立;

(2) x_0 是 f 的极小值点.

浙江大学2021年高等代数考研试题参考解答

1. 试求 t 的值, 使得多项式 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=x^3+6x^2+tx+8$$

具有重根, 并求出相应重根.

2. 已知可逆方阵 A 的逆为 @跟锦数学微信公众号

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&2&1&-2\\1&4&1&4\\-1&8&1&-8\end{pmatrix}.$$

以 A_{ij} 表示 A 中的元素 a_{ij} 的代数余子式, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4 iA_{ij}.$$

3. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系, 另有一组向量 @跟锦数学微信公众号

$$\beta_i=\alpha_i+\alpha_{i+1},i=1,2,\cdots,s-1,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1.$$

问何时 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系? 若 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 不是 $Ax=0$ 的基础解系, 试求出其极大线性无关组, 并将其扩充为基础解系.

4. 已知 A 为 3 行 2 列的实矩阵, B 为 2 行 3 列的实矩阵, @跟锦数学微信公众号

$$AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}.$$

试求

(1) $(AB)^2$;

(2) BA 的极小多项式;

(3) BA.

5. n 阶实方阵 $A=(a_{ij})$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$a_{ii}=0,i=1,\cdots,n;a_{ij}+a_{ji}=1,1\leqslant i<j\leqslant n.$$

证明: $\operatorname{rank}(A)\geqslant n-1$.

6. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, b 为 m 维列向量. 证明: $Ax=b$ 有解的充要条件是满足 $A^{\mathrm{T}}z=0$ 的 m 维列向量 z 也一定满足 $b^{\mathrm{T}}z=0$.

7. 4 阶实对称方阵 A 的行列式等于 2, A 有两个特征值 $1,-1$, 相应的特征子空间为 @跟锦数学微信公众号

$$L_1=L(\alpha_1,\alpha_2),L_2=L(\alpha_3),$$

其中 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha_1=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

求 A 的伴随矩阵 A^*, 并用正交阵对角化 A.

8. 线性空间 V 上线性变换 φ 的特征多项式为 @跟锦数学微信公众号

$$(\lambda-2)^6(\lambda+2)^4.$$

试将 V 分解成里两个非平凡的 φ-不变子空间的直和.

9. 对于实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix}1&x&4&2\\0&1&3&3\\0&0&2&y\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

(1) 当 x 和 y 为何值时, 方阵 A 可对角化?

(2) 当 $x=0, y=1$ 时, 求 A 的初等因子、不变因子和 Jordan 标准形.

10. 设 V 和 W 都是有限维线性空间, $\varphi: V \to W$ 是线性映射. 证明:

(1) φ 为满映射的充分必要条件是存在映射 $\psi: W \to V$, 使得 $\varphi\psi$ 是 W 上的恒等映射;

(2) φ 为单映射的充分必要条件是存在映射 $\tau: W \to V$, 使得 $\tau\varphi$ 是 V 上的恒等映射;

(3) φ 为同构的充分必要条件是存在映射 $\psi: W \to V$ 和 $\tau: W \to V$, 使得 $\varphi\psi$ 是 W 上的恒等映射, $\tau\varphi$ 是 V 上的恒等映射.

中国科学技术大学2021年数学分析考研试题

1. 计算题 (每小题 10 分, 共 50 分).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^2-\cos x}{\sin^2 x}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$.

(3) 若 @跟锦数学微信公众号

$$z=\frac{1}{x^2}f(x^2y)+xyg(x+y),$$

其中 f,g 具有二阶连续偏导数. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(4) 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{4x}\sin\left((x-t)^2\right)\,\mathrm{d}t$, 求 $f'(x)$.

(5) 已知 γ 由 @跟锦数学微信公众号

$$y^2=\frac{1}{3}x^2(1-4x), y\geqslant 0, x\in\left[0,\frac{1}{4}\right].$$

确定. 求 γ 的弧长.

2. (15 分) 计算第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_S\frac{x^4\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2},$$

其中 S 是由

$$x^2+y^2=1, z=1, z=-1$$

所围成的立体外侧.

3. (15 分) 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\cos nx$, 试证:

(1) 该函数项级数在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛;

(2) 该函数项级数在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上一致收敛.

4. (20 分) 试求 $\cos\alpha x$ 的 Fourier 级数展开式, 其中 α 不是整数, 并由此证明:

(1) $\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$,

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{8+\pi^2}{16}$.

5. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证: 存在 $c\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x=(1-c)f(c).$$

6. (15 分) 求实系数二次多项式 $p(x)$, 使得

$$\left|p(x)-\frac{1}{x-3}\right|<0.02, \forall\ x\in[-1,1]$$

成立.

7. (15 分) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1, \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{27}{2}.$$

试证:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x>2021.$$

8. (20 分) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界连续, 且

$$\lim_{h\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|=0.$$

试证: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

中国科学院大学2021年数学分析考研试题

1. 计算极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^n}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 试证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

3. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n\ \ (n=2,3,\cdots).$$

证明: $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有唯一的解, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. 计算积分

(1) $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(2) $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内有界可微, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 存在, 求证: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

6. 判断 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 的敛散性, 其中 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界递增的正数列.

7. 设 u 关于 x,y 的偏导数存在, 且 $u=x+y\sin u$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

8. 计算重积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint_D \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D: x^2+y^2\geqslant 2, x\leqslant 1$.

9. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^{a+1}\sin t^2\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{a}\ \ (a>0).$$

中国科学院大学2021年高等代数考研试题

1. (15 分) 确定满足下面五个条件的多项式: @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=3, f'(0)=-1, f(1)=2, f'(1)=3, f''(1)=-1.$$

2. (20 分) 计算行列式 $(n\geqslant 2)$ @跟锦数学微信公众号

$$\begin{vmatrix} 2+a_1c_1+b_1d_1 & a_2c_1+b_2d_1 & \cdots & a_nc_1+b_nd_1 \\ a_1c_2+b_1d_2 & 2+a_2c_2+b_2d_2 & \cdots & a_nc_2+b_nd_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1c_n+b_1d_n & a_2c_2+b_2d_2 & \cdots & 2+a_nc_n+b_nd_n \end{vmatrix}.$$

3. (20 分) 用正交线性变换将下面二次型化为标准形 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3.$$

4. (15 分) 已知 A 是 n 阶实对称半正定矩阵, 证明 A 的伴随矩阵 A^* 也是半正定的.

5. (20 分) 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 秩为 r 的复矩阵, 且 A 的第 r 个顺序主子式不为零, 即 @跟锦数学微信公众号

$$A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,r \\ 1,2,\cdots,r \end{pmatrix}\neq 0.$$

证明: 如果 $r<n$, 则对于每个 $r<i\leqslant n$, 都存在复数 $x_{i1},\cdots,x_{ir}$, 使得对任意 $1\leqslant j\leqslant n$, @跟锦数学微信公众号

$$a_{ij}=x_{i1}a_{1j}+x_{i2}a_{2j}+\cdots+x_{ir}x_{rj}.$$

6. (15 分) 已知 $v_1,\cdots,v_m$ 为一组向量, $\mathscr{A}$ 为可逆复线性变换, 且对任意 $i=1,\cdots,m$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{A}v_i\in\{v_1,\cdots,v_i\}.$$

证明: $\mathscr{A}$ 可对角化, 且特征值为单位根.

7. (20 分) 设 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域上所有 n 阶方阵组成的线性空间, $\mathscr{T}: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是线性变换, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{T}(AB) = \mathscr{T}(BA).$$

求证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{C},\ \text{s.t.}\ \forall\ A \in M_n(\mathbb{C}), \mathscr{T}(A) = \lambda \mathrm{tr}\,(A).$$

8. (15 分) 已知 A, B 为 n 阶实对称矩阵且 $AB = BA$. 证明: 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 与 $Q^{\mathrm{T}}BQ$ 均为对角矩阵.

9. 已知 E 为元素全为 1 的 n 阶复方阵, A, B 均为 n 阶复可逆方阵, $\sigma(W)$ 表示 W 的所有元素之和, m 是不为 1 的复数.

(1) 若 $A + B = mE$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$[1 - m\sigma(A^{-1})][1 - m\sigma(B^{-1})] = 1.$$

(2) (1) 的逆命题是否成立? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请举出反例.

中国人民大学2021年数学分析考研试题

1. (10 分) 设 @跟锦数学微信公众号

$$0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \forall\ n \geqslant 1.$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

2. (10 分) 利用闭区间套定理证明实数集是不可数的.

3. (10 分) 证明在 (a, b) 上的一致连续函数 $f(x)$ 可以延拓为 $[a, b]$ 上的连续函数.

4. (10 分) 举出一个在一点处可导但是这个点外的任何实数不连续的函数, 并给出其证明.

5. 计算题 (共 6 个小题, 每小题 7 分).

(1) 计算 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right).$$

(2) 设 C 为椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 在第一象限的部分, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\int_C xy\,\mathrm{d}s.$$

(3) 设曲面 @跟锦数学微信公众号

$$\Omega: x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1.$$

求 $\iint\limits_A \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(4) 设曲面 $\Sigma: 0\leqslant z=2-x^2-y^2$, 在 Σ 上的密度函数为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$, 求曲面 Σ 的质量.

(5) 求不定积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int\frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}\,\mathrm{d}x.$$

(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}$.

6. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $b>a>0$. 试证: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

7. (14 分) 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

8. (14 分)

(1) 将 $f(x)=\frac{x(2\pi-x)}{4}$ 在 $[0,2\pi]$ 上展开为余弦级数, 并求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(2) 利用逐项积分求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

9. (10 分) 证明 Tauber 定理: 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=A$$

存在, $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$.

10. (10 分) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个闭区域, 向量 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 点 $(a,b,c)\notin\Omega$. 令 @跟锦数学微信公众号

$$\boldsymbol{\rho}=\{x-a,y-b,z-c\},p=|\boldsymbol{\rho}|.$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{p}=\frac{1}{2}\iint_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S.$$

11. (10 分) 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

中南大学2021年数学分析考研试题

1. 计算题 (每小题 10 分, 共 40 分).

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

(3) $\iint\limits_D(x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D:x^2+2y^2\leqslant1$.

(4) 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_{\Sigma}x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$, 方向指向外侧.

2. (15 分) 若 $f(x)\in C^2[a,b]$, 且 $f''(x)<0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}<\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. (15 分) 若函数列 $\{f_n(x)\}\subset C[a,b]$, 且关于 n 单调递增, 当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)$. 试证: $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

4. (20 分)

(1) 求幂级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

的收敛域;

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调递增, 且 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 利用积分第二中值定理证明: $\{na_n\},\{nb_n\}$ 有界.

5. (20 分) 设 $n\geqslant 1$, @跟锦数学微信公众号

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$U\subset\mathbb{R}$, 且 U 为凸集, 即 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in U,\forall\ \lambda\in[0,1],(1-\lambda)x+\lambda y\in U.$$

再设 $f(x)$ 为定义在 U 上的凸函数, 即 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ x,y\in U,\forall\ \lambda\in[0,1],f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

定义 @跟锦数学微信公众号

$$\phi(t)=\phi(t;x,y)=f\left((1-t)x+ty\right).$$

试证:

(1) $f(x)$ 为 U 上的凸函数的重要条件是 $\phi(t)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数;

(2) 若 $f(x)$ 在 U 的某个内点处取得最大值, 则 $f(x)$ 在 U 上为常值函数.

6. (15 分) 若函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & x\leqslant y,\\ y(1-x), & x>y.\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $D:[0,1]\times[0,1]$ 上的最大值和最小值.

7. (15 分) 设函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^a|y|^a}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明:

(1) 当且仅当 $a>1$ 时, $f(x,y)$ 在原点连续;

(2) 当且仅当 $a>\frac{3}{2}$ 时, $f(x,y)$ 在原点可微.

8. (10 分) 若函数 $y=y(x)$ 由方程 @跟锦数学微信公众号

$$x^3+y^3+xy-1=0$$

所确定. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{3y+x-3}{x^3}$.

中南大学2021年高等代数考研试题

1. (16 分) 设 M 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一元多项式环 $\mathbb{P}[x]$ 的一个子集, 且满足

(1) @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ f(x),g(x)\in M, f(x)+g(x)\in M;$$

(2) @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ f(x)\in M, q(x)\in\mathbb{P}[x], q(x)f(x)\in M.$$

证明: 存在 $d(x)\in M$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$M=\{d(x)q(x);q(x)\in\mathbb{P}[x]\}.$$

2. (16 分) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义 A 的行列式 @跟锦数学微信公众号

$$|A|=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\tau(j_1\cdots j_n)$ 表示数字 $1,2,\cdots,n$ 的全排列 $j_1,\cdots,j_n$ 的逆序数. 证明:

(1) @跟锦数学微信公众号

$$|A|=\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_11}\cdots a_{i_nn}.$$

(2) 对 $1,2,\cdots,n$ 的任一全排列 $l_1,\cdots,l_n$, 都有 @跟锦数学微信公众号

$$|A|=\sum_{k_1\cdots k_n}(-1)^{\tau(l_1\cdots l_n)+\tau(k_1\cdots k_n)}a_{l_1k_1}a_{l_2k_2}\cdots a_{l_nk_n}.$$

3. (16 分) 设 A 为一个三阶实矩阵, 第一行为 (a,b,c), @跟锦数学微信公众号

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&t\end{pmatrix},$$

且 $AB=0$. 求方程组 $Ax=0$ 的通解.

4. (16 分) 设 A,B 分别为 $m\times n, n\times p$ 矩阵, 且 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(A)$. 试证: 存在 $p\times n$ 矩阵 W 使得 $A=ABW$.

5. (16 分) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵, 且满足

(1) @跟锦数学微信公众号

$$a_{11}=\cdots=a_{nn}=a>0;$$

(2) @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ i\in\{1,\cdots,n\},\sum_{j=1}^n|a_{ij}|+\sum_{j=1}^n|a_{ji}|<4a.$$

求 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

的规范形.

6. (16 分) 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon_{n+1}=-\varepsilon_1-\cdots-\varepsilon_n.$$

试证:

(1) 对 $\forall\ i\in\{1,\cdots,n+1\}$, @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_{n+1}$$

是 V 的一组基;

(2) 对任意 $\alpha \in V$, 在 (1) 中的 $n+1$ 组基中, 存在一组基使得 α 在这组基下的坐标都非负.

7. (22 分) 若 n 阶实矩阵 @跟锦数学微信公众号

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ * & * & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & * & * & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

有 n 个线性无关的特征向量, 且 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 都非零. 试证:

(1) A 有 n 个互异特征值;

(2) @跟锦数学微信公众号

$$W=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}; XA=AX\right\}$$

是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间;

(3) 若 @跟锦数学微信公众号

$$V=\left\{\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}; d_1,\cdots,d_n\in\mathbb{R}\right\},$$

则 W,V 同构.

8. (16 分) 若 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathscr{E}$ 是 V 上的恒等变换. 证明: $\sigma^3=\mathscr{E}$ 的充要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{im}\,(\sigma-\mathscr{E})\oplus\mathrm{im}\,(\sigma^2+\sigma+\mathscr{E})=V.$$

9. (16 分) 设 $M_n(\mathbb{R})$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵全体构成的线性空间, @跟锦数学微信公众号

$$\varphi: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

为非零线性映射, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ X,Y\in M_n(\mathbb{R}),\varphi(XY)=\varphi(YX).$$

子啊 $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ 上定义 @跟锦数学微信公众号

$$(\cdot,\cdot):(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\varphi(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}).$$

(1) $(\cdot,\cdot)$ 是 $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ 上的内积吗? 若是, 请给出证明; 若不是, 请说明理由;

(2) 证明: $(\cdot,\cdot)$ 是非退化的, 即若 @跟锦数学微信公众号

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\mathbf{0},\forall\ \boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R}),$$

则 $\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$.

第七章　考研竞赛试题参考解答

Contents

赣南师范大学2020年数学分析考研试题参考解答

1. (每小题 9 分, 共 63 分) 计算题.

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right)\\
&\xlongequal{k+1=j}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{j=3}^{n+1}\frac{j}{j-1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt[x]{x}-1)}{\ln x}$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}\\
&\xlongequal[t\to0]{e^t-1\sim t}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\frac{\ln x}{x}}{\ln x}=1.
\end{aligned}
$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上连续且 @跟锦数学微信公众号

$$
f(x)=3x+\int_0^x(t-x)f(t)\,dt,
$$

求 $f^{(2019)}(0)$ 的值.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$
f(x)=3x+\int_0^x tf(t)\,dt-x\int_0^x f(t)\,dt.
$$

右端可导, 而左端可导; 进而右端二阶可导, 左端又二阶可导; $\cdots$. 如此, f 可无限次求导. 不断求导得到 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}f'(x)&=3+xf(x)-\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)\right]\\&=3-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ \left(\Rightarrow f'(0)=3\right),\\f''(x)&=-f(x).\end{aligned}$$

这就得到常微分方程 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases}f''(x)=-f(x),\\f(0)=0,f'(0)=3.\end{cases}$$

求解得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=3\sin x\Rightarrow f^{(2019)}(x)=-3\cos x\Rightarrow f^{(2019)}(0)=-3.$$

(4) 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\mathrm{d}x$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}原式&\xlongequal{\tan x=t}\int\frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\arctan t-\int\frac{1}{\left(t+\frac12\right)^2+\frac34}\mathrm{d}t\\&=\arctan t-\frac{2}{\sqrt3}\int\frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt3}\left(t+\frac12\right)\right]^2}\mathrm{d}\left[\frac{2}{\sqrt3}\left(t+\frac12\right)\right]\\&=\arctan t-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt3}+C\\&=x-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt3}+C.\end{aligned}$$

(5) 计算反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$.

张祖锦解. 不妨设 $a>0$. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{x=a\tan\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^6\sec^6\theta} = \frac{1}{a^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{a^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{a^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{a^5}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{a^5}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{3\pi}{16a^5}.
\end{aligned}$$

(6) 求由方程 $xyz^3+x^2+y^3-z=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

张祖锦解. 设 $F=xyz^2+x^2+3y^2-z$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2x+yz^3}{1-3xyz^2},$$
$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{3y^2+xz^3}{1-3xyz^2}.$$

(7) 设 $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

(i) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y), \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

(ii) 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在?

张祖锦解. *(i)* @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1.$$

(ii) 由 $f(x,kx)=\frac{k^2}{1+k^2}$ 即知重极限不存在.

2. (本题 12 分) 设 $a_i>0, i=1,2,\cdots,m$, 其中 m 为正整数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

张祖锦解. 设 $A=\max\{a_1,\cdot,a_m\}$, 则

$$A=\sqrt[n]{A^n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{mA^n}=\sqrt[n]{m}A.$$

由夹逼原理即知结论成立.

3. (本题 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且对任意 $x\in[0,1]$ 都有 $f(x)\in[0,1]$, 求证存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $f(x_0)=x_0$.

张祖锦解. 设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(0)=f(0)\geqslant 0, g(1)=f(1)-1\leqslant 0$. 据连续函数介值定理,

$$\exists\ x_0\in[0,1],\ \text{s.t. } g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=x_0.$$

4. (本题 12 分) 设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots$. 讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上是否一致收敛? 说明理由.

张祖锦解. (1) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=0$; 当 $x>0$ 时, 由

$$0<f_n(x)<\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}$$

知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 故 $\{f_n\}$ 的极限函数为 $f(x)=0$.

(2) 由 $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$ 即知 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛 (于 $f(x)=0$).

(3) 由

$$0<f_n(x)<\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}\leqslant\frac{1}{n}\quad(\forall\ x\in[1,2])$$

及 M-判别法即知 $\{f_n\}$ 在 $[1,2]$ 上一致收敛 (于 $f(x)=0$).

5. (本题 12 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$2\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}|f(x)|^2&=\left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\\&\leqslant \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t\cdot\int_a^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\ \ (\textit{Cauchy-Schwarz}\ \text{不等式})\\&=(x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

进而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}2\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x&\leqslant 2\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\\&=(b-a)^2\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

6. (本题 10 分) 确定实数 a,b 的值使积分 @跟锦数学微信公众号

$$F(a,b)=\int_0^1\left(ax+b-\frac{1}{1+x^2}\right)^2\,\mathrm{d}x$$

达到最小值.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}F_a&=\int_0^1 2\left(ax+b-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2a}{3}+b-\ln 2=0,\\F_b&=\int_0^1 2\left(ax+b-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x\\&=a+2b-\frac{\pi}{2}=0\end{aligned}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$a=6\ln 2-\frac{3\pi}{2},\quad b=\pi-3\ln 2.$$

又由 @跟锦数学微信公众号

$$F_{aa}=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}, F_{ab}=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x=1, F_{bb}=2$$

知 $Hessf$ 正定, F 确在 @跟锦数学微信公众号

$$a=6\ln 2-\frac{3\pi}{2},\quad b=\pi-3\ln 2.$$

处取得最小值. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学), 版权所有, 不得复制/拍照/扫描/传播.

7. (本题 10 分) 确定幂级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

的收敛域.

张祖锦解. 设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$a_n<1+\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1+\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1+\ln n,$$
$$a_n>\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln(n+1).$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\ln(n+1)<a_n<1+\ln n\Rightarrow \frac{\ln(n+2)}{1+\ln n}<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1+\ln(n+1)}{\ln(n+1)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

故原幂级数的收敛半径为 1. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学), 版权所有, 不得复制/拍照/扫描/传播.

8. (本题 9 分) 选取 a,b, 使表达式 @跟锦数学微信公众号

$$[(x+y+1)\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}x+[b\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y]\,\mathrm{d}y$$

为某一函数的全微分, 并求出这个函数.

张祖锦解. 设 @跟锦数学微信公众号

$$P=(x+y+1)\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^y, Q=b\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} b\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=Q_x=P_y=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^y \\ \Rightarrow(b-1)\mathrm{e}^x-(a+1)\mathrm{e}^y=0 \\ \Rightarrow a=-1, b=1. \end{aligned}$$

设 f 为满足题意的函数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & f_x=P=(x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y \\ \Rightarrow & f=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y x+\phi(y) \\ \Rightarrow & \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y x+\phi'(y)=f_y=Q=\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y \\ \Rightarrow & \phi'(y)=-(y+1)\mathrm{e}^y \Rightarrow \phi(y)=-y\mathrm{e}^y+C \\ \Rightarrow & f=(x+y)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)+C. \end{aligned}$$

9. (本题 10 分) 计算曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

其中 S 是由曲面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1, y=2$ 所围立体表面的外侧.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\iint_S \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &\overset{Gauss}{=\!=\!=} -\iiint_{\substack{1\leqslant y\leqslant 2\\ x^2+z^2\leqslant y}} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \iint_{x^2+z^2\leqslant y} \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{r}\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r \\ &= -\pi\int_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \overset{\sqrt{y}=s}{=\!=\!=} -\pi\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^s\cdot 2s\,\mathrm{d}s \\ &= -2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\pi. \end{aligned}$$

赣南师范大学2020年高等代数考研试题参考解答

1. (15 分) 求 a, b, 使得多项式 $x^4-4ax+b$ 有重因式.

张祖锦解. 设 $f(x)=x^4-4ax+b$, 则 $f'(x)=4x^3-4a$. 注意到 f 没有重因式 $\Leftrightarrow (f, f')=1$. 所以我们去算 (f, f'). 据带余除法, @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\frac{x}{4} f'(x)+r_1(x), r_1(x)=-3ax+b.$$

(1) 若 $a=b=0$, 则 $(f, f')=x^3$, f 有重根.

(2) 若 $a \neq 0$, 则可设 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)=q(x) r_1(x)+r_2(x), \quad r_2=c.$$

令 $x=\frac{b}{3a}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$r_2(x)=c=-4a+\frac{4b^3}{27a^3}.$$

(i) 若 $r_2(x)=0$, 则 $(f, f')=x-\frac{b}{3a}$, f 有重根. 此时, $27a^4=b^3$.

(ii) 若$r_2(x) \neq 0$, 则 $(f, f')=1$, f 无重根.

(3) 若 $a=0, b \neq 0$, 则 $(f, f')=1$, f 无重根.

综上, f 有重根 $\Leftrightarrow 27a^4=b^3$.

2. (10 分) 计算 n 级行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
-2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-n+1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\
-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n
\end{array}\right| .$$

张祖锦解. 第 i 列加到第 1 列, $2 \leqslant i \leqslant n$, 得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \cdot n! = \frac{n(n+1)!}{2}.
\end{aligned}
$$

3. (20 分) 问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + ax_2 + 4x_3 = b \end{cases}
$$

有解? 有唯一解? 有无穷解? 当有解时, 求出全部解.

张祖锦解. 增广矩阵

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & a & 4 & b \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & a-6 & 1 & b-6 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a}{3}-1 & \frac{a}{3}+b-8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(1) 若 $a \neq 3$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$. 方程组有唯一解, 依次解出

x_3, x_2, x_1, 得 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-5b+32}{a-3} \\ \frac{b-7}{a-3} \\ \frac{a+3b-24}{a-3} \end{pmatrix}.$$

(2) 若 $a=3, \frac{a}{3}+b-8=0$, 即 $a=3, b=7$, 即 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A, b)=2$, 方程组有无穷解, 且通解为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \forall k.$$

(3) 若 $a=3, \frac{a}{3}+b-8 \neq 0$, 即 $a=3, b \neq 7$ 时, 方程组无解.

4. (15 分) 令 @跟锦数学微信公众号

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

是一个 n 级矩阵, 计算 $A^2, A^3, \cdots, A^{n-1}$.

张祖锦解. 设在某组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下, 线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 A, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) A \\ \Leftrightarrow & \mathscr{A}\varepsilon_1 = \varepsilon_n, \mathscr{A}\varepsilon_2 = \varepsilon_1, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \\ \Rightarrow & \mathscr{A}^2\varepsilon_1 = \varepsilon_{n-1}, \mathscr{A}^2\varepsilon_2 = \varepsilon_n, \mathscr{A}^2\varepsilon_3 = \varepsilon_1, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n = \varepsilon_{n-2} \\ \Rightarrow & \mathscr{A}^2(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) A^2, A^2 = \begin{pmatrix} & E_{n-2} \\ E_2 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一直做下去得 @跟锦数学微信公众号

$$A^3=\begin{pmatrix} & E_{n-3}\\ E_3 & \end{pmatrix},\cdots,A^{n-1}=\begin{pmatrix} & 1\\ E_{n-1} & \end{pmatrix}.$$

5. (15 分) 设 A,B 都是 n 级矩阵, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

张祖锦解. 设 $\operatorname{rank}(A)=r,\operatorname{rank}(B)=s$, 则存在可逆矩阵 P,Q,R,S 使得 @跟锦数学微信公众号

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},RBS=\begin{pmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

取 @跟锦数学微信公众号

$$T=\begin{pmatrix}0 & R\\ P & 0\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix},$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$T\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}U=\begin{pmatrix}RBS & 0\\ 0 & PAQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_s & & & \\ & 0 & & \\ & & E_r & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}=r+s=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

6. (15 分) 设 A 是 n 级正定实矩阵, 证明: 当 $n>1$ 时, 伴随矩阵 A^* 是正定矩阵.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} \text{ 是 } n \text{ 级正定实矩阵}\\
\Rightarrow &\text{存在正交阵 } P, \text{ 使得 } P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n), \lambda_i>0\\
\Rightarrow &\begin{cases} P^{-1}A^{-1}P=\operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}\right)\\ |A|=\lambda_1\cdots\lambda_n>0 \end{cases}\\
\Rightarrow &P^{-1}A^*P=P^{-1}|A|A^{-1}P=\operatorname{diag}\left(\dfrac{|A|}{\lambda_1},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}\right)\\
\Rightarrow &A^* \text{ 是 } n \text{ 级正定实矩阵}.
\end{aligned}$$

7. (20 分) 设 V 是定义域为实数集 $\mathbb{R}$ 的一元实函数组成的集合, 对 $f,g\in V,\alpha\in\mathbb{R}$, 分别用下列式子定义 $f+g,\alpha f$: @跟锦数学微信公众号

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

(1) 证明 V 是数域上的线性空间.

(2) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f_0(x)=1, f_1(x)=\cos x, f_2(x)=\cos 2x, f_3(x)=\cos 3x.$$

判断 f_0,f_1,f_2,f_3 是否线性相关.

(3) 用 $L(f,g)$ 表示由 f,g 生成的子空间, 判断 $L(f_0,f_1)+L(f_2,f_3)$ 是否为直和.

张祖锦解. *(1) V 满足线性空间定义的那 8 条.*

(2) 设 $\sum\limits_{i=0}^{3}k_if_i=0$, 则两边乘以 f_i 后在 $[-\pi,\pi]$ 上积分得 $k_i=0$. 故 f_0,f_1,f_2,f_3 线性无关.

(3) 由第 2 步即知 $L(f_0,f_1)+L(f_2,f_3)$ 是直和.

8. (20 分) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上 3 维线性空间, V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

求 σ 的特征值和特征向量. 又问: σ 可否对角化? 若可对角化, 求 C 使得 $C^{-1}AC$ 成对角形.

张祖锦解. 由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ 知 A (σ) 的特征值为 $\lambda_1=-1$ (单重), $\lambda_2=1$ (二重). 由

$$\lambda_1E-A\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 A 的对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

σ 的对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $-\alpha_1+\alpha_3$. 又由

$$\lambda_2E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 A 的对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量为

$$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

σ 的对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$. 令

$$C=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\,(-1,1,1)$, 为对角形.

9. (20 分) 设 V 是一个欧氏空间, $\alpha \in V$ 是一个非零向量. 对于 $\xi \in V$, 规定 @跟锦数学微信公众号

$$\tau(\xi) = \xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示内积. 证明:

(1) τ 是 V 的一个正交变换, 且 $\tau^2 = \mathscr{E}$, 其中 $\mathscr{E}$ 是单位变换.

(2) 当 V 是一个 n 维欧氏空间时, 证明: 存在 V 的一个标准正交基, 使得 τ 关于这组基的矩阵有形状: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 在 3 维欧氏空间里说明线性变换 τ 的几何意义.

张祖锦解. *(1)* τ *是线性变换. 由* @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} |\tau(\xi)|^2 &= (\tau(\xi), \tau(\xi)) \\ &= \left(\xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha\right) \\ &= (\xi, \xi) - 4\frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\xi, \alpha) + \frac{4(\xi, \alpha)^2}{(\alpha, \alpha)^2}(\alpha, \alpha) \\ &= (\xi, \xi) = |\xi|^2, \quad \forall\ \xi \in V \end{aligned}$$

即知 τ *是正交变换. 进一步由* @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \tau^2(\xi) &= \tau\left(\xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha\right) \\ &= \xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha - 2\frac{\left(\xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \alpha\right)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \\ &= \xi, \quad \forall\ \xi \in V \end{aligned}$$

知 $\tau^2 = \mathscr{E}$.

(2) 设 $\xi_1 = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$, *将* ξ_1 *扩充为* V *的一组标准正交基* $\xi_1, \cdots, \xi_n$, *则* @跟锦数学

$$\begin{aligned}&\tau(\xi)=\xi-2(\xi,\xi_1)\xi_1\\ \Rightarrow&\tau(\xi_1)=-\xi_1,\tau(\xi_2)=\xi_2,\cdots,\tau(\xi_n)=\xi_n\\ \Rightarrow&\tau(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}-1&\\&E_{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) 在 3 维欧氏空间中, τ 是关于以 α 为法向量的平面的镜面反射. 比如取 $\alpha=(0,0,1)$, 则

$$\tau(\xi)=\xi-2\xi_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\-\xi_3\end{pmatrix},\quad\forall\ \xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

河北师范大学2020年数学分析考研试题参考解答

1. 计算 (本题共 60 分, 每小题 15 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^{\frac1n}$.

张祖锦解.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right]\\&\xlongequal{Stolz}\exp\left[\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]=1.\end{aligned}$$

(2) 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$, 其中 D 是 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的区域.

张祖锦解. 设

$$\left.\begin{aligned}x-y&=u\\x+y&=v\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}2x&=u+v\\2y&=v-u\end{aligned}\right.,$$

则 $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=2, \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2}$. 于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1 \mathrm{d}v \int_{-v}^{v} \mathrm{e}^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[v\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\Big|_{u=-v}^{u=v}\right]\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

(3) 计算 $\oiint\limits_S yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+zx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是单位圆周 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

张祖锦解. 由 Gauss 公式即知原式 $=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}(0+0+0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$.

(4) 设 $f(x,y)$ 是在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$M=\max_{x\in D}|f(x,y)|,\quad m=\min_{x\in D}|f(x,y)|.$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\iint\limits_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\left(\iint\limits_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\iint\limits_D M^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

另一方面, 不妨设 f 在 D 上的最大值 M 在 D 内某点 P 处达到, 则对 $\forall\ \varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ 0<\delta\ll 1,\ \text{s.t. } U(P;\delta)\subset D; Q\in U(P;\delta)\Rightarrow f(Q)>M-\varepsilon.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\left(\iint\limits_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}&\geqslant\left(\iint\limits_{U(P;\delta)} |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\geqslant (M-\varepsilon)(\pi\delta^2)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

因此, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}(M-\varepsilon)(\pi\delta)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left(\iint_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left(\iint_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\leqslant M.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得 @跟锦数学微信公众号

$$M-\varepsilon\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left(\iint_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left(\iint_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant M.$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\iint_D |f(x,y)|^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}=M$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学), 版权所有, 不得复制/拍照/扫描/传播.

2. (本题 15 分) 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, 证明以下结论:

(1) $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$;

(2) $a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant a_{n-2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

张祖锦解. *(1)* 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^1 x^{n-2}[1-(1-x^2)]\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= a_{n-2}-\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= a_{n-2}-\frac{1}{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(x^{n-1})\\ &= a_{n-2}+\frac{1}{n-1}\int_0^1\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)\cdot x^{n-1}\,\mathrm{d}x\\ &= a_{n-2}-\frac{3}{n-1}a_n\end{aligned}$$

知 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

(2) 由 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow x^n \leqslant x^{n-1} \leqslant x^{n-2}$$

即知 $a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant a_{n-2}$.

(3) 由 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} \leqslant \frac{a_n}{a_{n-2}} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant 1$$

即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

3. (本题 15 分) 研究函数 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的连续性, 一致连续性与可微性.

张祖锦解. (1) 由 $\dfrac{1}{2^n + x} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ 及 Weierstrass 判别法即知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 而和函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

(2) 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n + x} - \frac{1}{2^n + y} \right) \right| \\
&= |x - y| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n + x)(2^n + y)} \\
&\leqslant |x - y| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{4}{3} |x - y|
\end{aligned}$$

即知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \frac{3\varepsilon}{4} > 0,\ \text{s.t.}\ \forall\ x, y \geqslant 0, |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

故 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(3) 由 @跟锦数学微信公众号

$$\left| \left(\frac{1}{2^n + x} \right)' \right| = \frac{1}{(2^n + x)^2} \leqslant \frac{1}{4^n}$$

知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n + x} \right)'$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 而 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且可逐项求导.

4. (本题 15 分) 证明 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

张祖锦解. 由

$$\lim_{x\to+\infty}|f'(x)|=\lim_{x\to+\infty}|\ln x+1|=+\infty$$

知

$$\forall\ n\in\mathbb{Z}_+,\exists\ x_n \text{ 沿 } \nearrow +\infty,\ \text{s.t.}\ \forall\ x\geqslant x_n, |f'(x)|\geqslant n.$$

于是

$$\left|\left(x_n+\frac{1}{n}\right)-x_n\right|=\frac{1}{n}\to 0,$$
$$\left|f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)-f(x_n)\right|=|f'(\xi_n)|\frac{1}{n}\geqslant 1.$$

这表明 f 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

5. (本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 有界并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

张祖锦解. 由 $\{a_n\}$ 有界知

$$\exists\ M>0,\ \text{s.t.}\ \forall\ n\geqslant 1, |a_n|\leqslant M.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}+2a_n)=0$ 知

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N,\ \text{s.t.}\ \forall\ n\geqslant N, |a_{2n}+2a_n|<\varepsilon.$$

于是当 $n\geqslant N$ 时,

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{a_{2n}}{2}<a_n<\frac{\varepsilon}{2}-\frac{a_{2n}}{2};$$

$$\begin{aligned}
a_n &< \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{a_{2\cdot 2n}}{2}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{a_{2^2n}}{2^2},\\
a_n &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{a_{2^2\cdot 2^2n}}{2^2}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4} + \frac{a_{2^4n}}{2^4}\\
&< \cdots\\
&< \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{a_{2^mn}}{2^mn}\\
&< \varepsilon + \frac{M}{2^n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &> -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{a_{2\cdot 2n}}{2}\right)\\
&= -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{a_{2^2n}}{2^2};\\
a_n &> -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{1}{2^2}\left(-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{a_{2^2\cdot 2^2n}}{2^2}\right)\\
&= -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^2} - \frac{\varepsilon}{2^3} - \frac{\varepsilon}{2^4} + \frac{a_{2^4n}}{2^4}\\
&> \cdots\\
&> -\sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{a_{2^mn}}{2^mn}\\
&> -\varepsilon - \frac{M}{2^mn}.
\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$ 得 $-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant \varepsilon \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon$.

6. (本题 15 分) 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+ze^z=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ 在 $(1,-1,0)$ 处的切线方程.

张祖锦解. 记曲线为 C, 方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 则 C 上点 $(1,-1,0)$ 处的切

向量为

$$\begin{aligned}&\{F_x,F_y,F_z\}\times\{G_x,G_y,G_z\}\,|_{(1,-1,0)}\\=&\{2,-2,1\}\times\{1,-1,0\}\\=&\{1,1,0\}.\end{aligned}$$

故所求为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$.

7. (本题 15 分) 证明: 不存在从闭区间 $[0,1]$ 到单位圆周上的一对一的连续对应.

张祖锦解. 用反证法. 若存在从闭区间 $[0,1]$ 到单位圆周

$$S^1=\{(\cos\theta,\sin\theta);0\leqslant\theta<2\pi\}$$

上的一对一的连续对应 f. 则可设

$$f(0)=(\cos\theta_0,\sin\theta_0),\quad f(1)=(\cos\theta_1,\sin\theta_1).$$

不妨设 $\theta_0<\theta_1$. 考虑

$$\begin{aligned}A&=\{(\cos\theta,\sin\theta);\theta_0<\theta<\theta_1\},\\B&=\{(\cos\theta,\sin\theta);\theta_1<\theta<\theta_0+2\pi\}.\end{aligned}$$

则 A,B 是 S^1 中互不相交的开集, 进而 $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ 是 $[0,1]$ 中互不相交的开集. 注意到

$$\begin{aligned}\left[f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\right]^c&=\left[f^{-1}(A\cup B)\right]^c\\&=f^{-1}\left((A\cup B)^c\right)\\&=f^{-1}\left(\{f(0),f(1)\}\right)\\&=\{0,1\},\end{aligned}$$

我们知 $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)=(0,1)$. 据 $(0,1)$ 的连通性即知 $f^{-1}(A)=\varnothing$ 或 $f^{-1}(B)=\varnothing$. 这与 f 映上矛盾. 故有结论.

第八章 裴礼文数学分析中的典型问题与方法练习题汇总

网络版参考答案请点击[裴免]裴礼文数学分析练习题免费参考解答-迅速定位版. 如需纸质版, 请加张祖锦微信: **zhangzujin361**, **60** 元. 如今还有裴/谢上/谢下三本纸质资料. 一次性同一收货地址 @跟锦数学微信公众号

购买 **1** 本, 无优惠;

购买 **2** 本, 每本优惠 **5** 元;

购买 **3** 本, 每本优惠 **10** 元;

购买 **6** 本, 每本优惠 **20** 元;

购买 **10** 本及以上, 每本优惠 **30** 元.

Contents

1.1 函数

练习 1.1.1 求复合函数表达式:

(1) 已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 设 $f_n(x)=f\{f[\cdots(f(x))\cdots]\}$ (n 个 f). 求 $f_n(x)$. (南京邮电大学等)

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, 试证明 $f[f(x)]=x$, 并求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

练习 1.1.2 是否存在这样的函数, 它在区间 $[0,1]$ 上每点取有限值, 在此区间的任何点的任意邻域内无界. (上海师范大学)

练习 1.1.3 试说明能有无穷多个函数, 其中每个函数 f, 皆使得 $f\circ f$ 为 $\mathbb{R}$ 上的恒等函数.

练习 1.1.4 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, $f(1)=a$, $f(x+2)-f(x)=f(2)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

(1) 试用 a 表达 $f(2)$ 和 $f(5)$;

(2) a 为何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数. (清华大学)

练习 1.1.5 设 $f(x)=x-[x]$ (即 x 的小数部分), $g(x)=\tan x$, 说明这时 $f(x)-g(x)$ 为何不是周期函数. 类似地 $f(x)+g(x)$ 也如此. 从而周期函数的和与差未必是周期函数.

练习 1.1.6 (双镜效应) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实函数, f 的图像以直线 $x=b$ 和 $x=c$ $(b\neq c)$ 分别作为其对称轴. 试证 f 必为周期函数, 且周期为 $2|b-c|$.

练习 1.1.7 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 并且以直线 $x=a$ $(a\neq 0)$ 作为对称轴, 试证 f 必为周期函数并求其周期.

练习 1.1.8 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的周期函数 $(T>0)$, 且 f 在 $[0,T]$ 上严格单调, 试证 $f(x^2)$ 不可能是周期函数.

练习 1.1.9 证明确界的关系式: (1) 叙述数集 A 的上确界定义, 并证明: 对于任意有界数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 总有 $\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$; (北京科技大学)

(2) 设 A,B 是两个由非负数组成的任何数集, 试证 $\sup\limits_{x\in A}x\cdot\sup\limits_{y\in B}y=\sup\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}}xy$.

练习 1.1.10 试证: 若 $x_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$, 则 $\{x_n\}$ 必达到下确界 (即存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $x_m=\inf\{x_n\}$). (武汉大学)

练习 1.1.11 设 f,g 是 $\mathbb{R}$ 上的实函数, 且

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),\quad\forall\ x,y\in\mathbb{R}.$$

在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x)$ 不恒等于零, 但有界. 试证: $|g(y)|\leqslant 1$ $(\forall\ y\in\mathbb{R})$.

练习 1.1.12 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的增函数 (指 $\forall\ x_1<x_2: a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$,

有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$) (但不一定连续), 如果 $f(a)\geqslant a$, $f(b)\leqslant b$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\exists\ x_0\in[a,b],\ \text{s.t.}\ f(x_0)=x_0.\ (\text{山东大学})$$

练习 1.1.13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\nearrow$, $f(0)>0$, $f(1)<1$. 试证: $\exists\ x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0^2$. (福建师范大学)

1.2 用定义证明极限的存在性

练习 1.2.1 (1) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$; (武汉大学, 哈尔滨工业大大学) (2) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. (清华大学)

练习 1.2.2 用 $\varepsilon-N$ 方法证明: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3q^n=0$ $(|q|<1)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$.

练习 1.2.3 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 试用 $\varepsilon-N$ 方法证明: 若 $x_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

练习 1.2.4 设 $x_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\cos k}{k(k-1)}$, 试证 $\{x_n\}$ 收敛.

练习 1.2.5 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 试证: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ (为有限数), 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$. (首都师范大学)

练习 1.2.6 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\exists\ C>0, m<n$ 时, $a_n\leqslant Ca_m$. 已知 $\{a_n\}$ 中存在子序列 $\{a_{n_k}\}\to0$. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. (武汉大学)

练习 1.2.7 设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 求证 $\{x_n\}$ 发散.

练习 1.2.8 判断题: 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若在任一子序列 $\{a_{n_k}\}$ 中均存在收敛的子列 $\{a_{n_{k_r}}\}$, 则 $\{a_n\}$ 必为收敛数列. (北京大学)

练习 1.2.9 设 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, $\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$ 为其一个子列, 若 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (华中师范大学)

练习 1.2.10 设 $\{x_n\}$ 是一个无界数列, 但非无穷大量, 证明: 存在两个子列, 一个是无穷大量, 另一个是收敛子列. (哈尔滨工业大学)

练习 1.2.11 设函数 $f(x),g(x)$ 在 0 的某个邻域里有定义 $g(x)>0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$; 且当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_{mn}\rightrightarrows0$ $(m=1,2,\cdots,n)$, 亦即 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N(\varepsilon)>0$, 当 $n>N(\varepsilon)$ 时, 一切 $m=1,2,\cdots,n$, 都有 $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$; 另设 $\alpha_{mn}\neq0$. 试证 @跟锦

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f(\alpha_{mn})=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} g(\alpha_{mn}), \tag{1}$$

当右端极限存在时成立.

练习 1.2.12 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{3n^2}=\frac{1}{6}.$$

并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n} a^{\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}}-1}\ (a>0)$.

1.3 求极限值的若干方法

练习 1.3.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. (北京航空航天大学, 中国科学技术大学)

练习 1.3.2 证明 Vieta 公式:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots. \tag{2}$$

练习 1.3.3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n\ (a,b,c>0)$. (东北师范大学)

练习 1.3.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n\ (x\neq 0)$.

练习 1.3.5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

练习 1.3.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$. (华中师范大学)

练习 1.3.7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)$. (湖北大学)

练习 1.3.8 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{3^x-1}$. (华中师范大学)

练习 1.3.9 设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在, 试求

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$.

练习 1.3.10 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}.$$

(陕西师范大学)

练习 1.3.11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n\sin^n x}$. (内蒙古大学)

练习 1.3.12 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2\sin 2x}$. (中国科学院)

练习 1.3.13 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ a\neq1)$. (中国科学院)

练习 1.3.14 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0\\ 5, & x=0\\ \dfrac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}, & x>0\end{cases}$. 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$. (上海工业大学)

练习 1.3.15 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$. (华中师范大学)

练习 1.3.16 证明: 当 $0<k<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$.

练习 1.3.17 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$. (浙江大学)

练习 1.3.18 已知 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求 a,b. (国防科技大学)

练习 1.3.19 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x}\right)$. (华中师范大学)

练习 1.3.20 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$. (武汉大学)

练习 1.3.21 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

练习 1.3.22 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

练习 1.3.23 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 试证:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}=0;\ 2)\ \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant1}\left(\prod_{i=1}^n x_{i+k}\right)^{\frac{1}{n}}=0.$$

练习 1.3.24 对 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$, $p_1>p_2>\cdots>p_n$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$, 令 $F(x)=\left(p_1a_1^x+p_2a_2^x+\cdots+p_na_n^x\right)^{\frac{1}{x}}$, 试先证明: 1) $a_n\leqslant F(x)\leqslant a_1$; 2) $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}$. 然后求 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(x)$.

1.4 O. Stolz 公式

练习 1.4.1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 其中 1) 设 $x_n=\sqrt[n]{n}$; 2) 设 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

练习 1.4.2 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$. (华中师范大学)

练习 1.4.3 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$. (四川大学, 国防科技大学)

练习 1.4.4 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. 1) 若 a 为有限数, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n(n+1)}=\frac{a}{2}$; 2) 若 a 为 $+\infty$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n(n+1)}=+\infty$. (南京大学)

练习 1.4.5 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}p_k=\infty$, $p_k\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots)$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}p_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}=a$. (东北师范大学)

练习 1.4.6 已知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在, $\{p_k\}$ 为单调增加的正数列, 且 $\lim_{n\to\infty}p_n=+\infty$, $p_{n+1}\neq p_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0. \text{(北京师范大学)}$$

练习 1.4.7 若 $0<\lambda<1$, $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^na_0)=\frac{a}{1-\lambda}.$$

练习 1.4.8 求极限 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$; 2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)$

1.5 递推形式的极限

练习 1.5.1 已知 $a_1=\sqrt{6}$, $\quad a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$. 试证: $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在, 并求其值. (中国科技大学, 北京大学, 哈尔滨工业大学, 北京邮电大学等)

练习 1.5.2 设 $x_1=1$, $\quad x_{n+1}=\frac{1+2x_n}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$. (哈尔滨工业大学, 华中理工大学等)

练习 1.5.3 设 $0<c<1$, $\quad a_1=\frac{c}{2}$, $\quad a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限. (武汉大学, 华中师范大学)

练习 1.5.4 设 $a>0, 0<x_1<a, x_{n+1}=x_n\left(2-\frac{x_n}{a}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限. (华东师范大学)

练习 1.5.5 设 $x_1=a>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$. 试证 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限. (华中理工大学, 厦门大学, 工程兵学院)

练习 1.5.6 $y_{n+1}=y_n(2-y_n)$, $0<y_0<1$. 求证: $\lim_{n\to\infty} y_n=1$. (武汉大学)

练习 1.5.7 证明: 1) 存在唯一的 $c\in(0,1)$ 使得 $c=\mathrm{e}^{-c}$; 2) 任给 $x_1\in(0,1)$, 定义 $x_{n+1}=\mathrm{e}^{-x_n}$, 则有 $\lim_{n\to\infty} x_n=c$. (中国人民大学)

练习 1.5.8 设 $x_{n+1}=1+\frac{x_n^2}{1+x_n^2}, x_1=2$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. (北京师范大学)

练习 1.5.9 设 $x_0>0$, $\quad x_{n+1}=2+\frac{1}{\sqrt{x_n}}$. 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$. (武汉大学)

练习 1.5.10 设 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$, 数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义: @跟锦数学微信公众号

$$x_0=1, x_{n+1}=f(x_n)\ (n=0,1,2,\cdots).$$

求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$. (浙江大学)

练习 1.5.11 设 $u_1=3$, $\quad u_2=3+\frac{4}{3}$, $\quad u_3=3+\frac{4}{3+\frac{4}{3}}$, $\cdots$. 如果数列 $\{u_n\}$ 收敛, 计算其极限, 并证明数列 $\{u_n\}$ 收敛于上述极限. (武汉大学)

练习 1.5.12 设 $x_0=m$, $\quad x_1=m+\varepsilon\sin x_0$, $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$, 其中 $0<\varepsilon<1$. 试证: $\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$ 存在且为克普勒方程 $x-\varepsilon\sin x=m$ 的唯一唯一根.

练习 1.5.13 设 $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|$ $(0<k<1)$, 试证: $\{x_n\}$ 收敛.

练习 1.5.14 设 a_1, b_1 是二正数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

试证: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$. (大连理工大学)

练习 1.5.15 设 a_1 和 b_1 是任意两个正数, 并且 $a_1\leqslant b_1$, 还设 @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\ (n=2,3,\cdots).$$

求证: $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛, 且极限相同. (中国科学院, 安徽大学)

练习 1.5.16 讨论由 $x_1=a, x_n=px_{n-1}+q$ $(p>0)$ 所定义的数列的收敛性. (南京大学)

练习 1.5.17 设 $\mathbb{R}$ 中数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}=b_n-qa_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 其中 $0<q<1$. 证明: 当 $\{b_n\}$ 有界时, $\{a_n\}$ 有界. (清华大学)

练习 1.5.18 设 $x_0=1, x_1=\mathrm{e}, x_{n+1}=\sqrt{x_n x_{n-1}}\ (n\geqslant 1)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

练习 1.5.19 设 $a_{n+1}=a_n+a_n^{-1}\ (n>1),\ a_1=1$, 则

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}=+\infty$. (中国科学院)

练习 1.5.20 设连续函数 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是正的, 单调递减的, 且 @跟锦数学微信公众号

$$d_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证: 数列 $d_1, d_2, \cdots$ 收敛. (清华大学)

练习 1.5.21 已知 $a_1=\alpha,\ b_1=\beta\ (\alpha>\beta)$, @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}\quad (n=1,2,\cdots).$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且相等, 并求出极限值. (内蒙古大学)

练习 1.5.22 证明: 数列 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}\ (a\geqslant 0)$ 的极限存在, 并求其极限. (国外赛题)

练习 1.5.23 设 $\{x_n\}$ 是如此数列: $x_0=25,\quad x_n=\arctan x_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限. (国外赛题)

练习 1.5.24 设 $S_1=\ln a\ (a>1);\quad S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(a-S_k)\ (n=2,3,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

练习 1.5.25 设 $x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明 $x_n\to 0$ 且 $x_n\sim\dfrac{2}{n}$ (当 $n\to\infty$ 时).

练习 1.5.26 设 $a_1=1, a_k=k(a_{k-1}+1)$. 试计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$. (国外赛题)

练习 1.5.27 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$ 由下式确定: @跟锦数学微信公众号

$$y_1=1,\quad 2y_{n+1}=y_n+\sqrt{y_n^2+a_n}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明 $\{y_n\}$ 是递增的收敛数列. (福建师范大学)

1.6 序列的上、下极限

练习 1.6.1 用不同的方法证明以下不等式:

1) @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

在不出现 $(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 的情况下成立.

2) 设 $x_n>0,\ y_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

在不出现 $0\cdot(+\infty)$ 的情况下成立.

练习 1.6.2 证明: 1) $\varliminf_{n\to\infty} x_n-\varlimsup_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n-y_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n-\varliminf_{n\to\infty} y_n$;

2) 若 $x_n>0, y_n>0$ 且 $\varliminf_{n\to\infty} y_n>0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n/\varlimsup_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n/y_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n/\varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

练习 1.6.3 证明: 若 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\varlimsup_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$. 则序列 $\{x_n\}$ 收敛.

练习 1.6.4 设 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

并由此推出, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

练习 1.6.5 试证: 若 $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=A$, 则对任意固定的整数 n_0 都有 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n_0+n}|}=a.\ \text{(北京理工大学)}$$

练习 1.6.6 证明: 若 $\varlimsup_{n\to\infty} c_n\leqslant c$, 则 $\varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{1+|c_n|}\leqslant\dfrac{c}{1+|c|}$.

练习 1.6.7 给定正数列 $\{a_n\}$, 证明 $\varlimsup_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}$. (国外赛题)

练习 1.6.8 证明: 集合 $M=\left\{\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{n}{2n+1};\ n=1,2,\cdots\right\}$ 只有聚点 $0,1$. (国外赛题)

练习 1.6.9 序列 $\{x_n\}$ 定义如下: $x_1=x$ 是闭区间 $[0,1]$ 中的某一点, 如果 $n\geqslant 2$, 那么序列 $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_{n-1}, & n\text{ 是偶数}\\ \dfrac{1+x_{n-1}}{2}, & n\text{ 是奇数}\end{cases}$ 可能有多少个聚点? (国外赛题)

练习 1.6.10 证明: 若序列 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. 则此序列的聚点之集合是区间 $[l,L]$, 其中 $l=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$, $\quad L=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.7 函数的上、下极限

练习 1.7.1 试将 § 1.6 中关于序列上、下极限的例题与练习改变成函数上、下极限的命题, 并加以讨论.

1.8 实数及其基本定理

练习 1.8.1 设函数 $f(x)$ 在有限区间 I 上有定义, 满足: $\forall\ x\in I$, 存在 x 的某个开邻域 $(x-\delta,x+\delta)$, 使得 $f(x)$ 在 $(x-\delta,x+\delta)\cap I$ 上有界. 1) 证明: 当 $I=[a,b]$ $(0<b-a<+\infty)$ 时, $f(x)$ 在 I 上有界; 2) 当 $I=(a,b)$ 时, $f(x)$ 在 I 上一定有界么? (厦门大学)

练习 1.8.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且在每一点处函数的极限存在, 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. (哈尔滨工业大学)

练习 1.8.3 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, $\forall\ \xi\in(a,b)$, $\exists\ \delta>0$, 当 $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap(a,b)$ 时, 有 $f(x)<f(\xi)$ (当 $x<\xi$ 时); $\quad f(x)>f(\xi)$ (当 $x>\xi$ 时). 求证: $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增.

练习 1.8.4 用有限覆盖定理证明: 任何有界数列必有收敛子列. (西北大学)

练习 1.8.5 试用区间套定理重新证明 §1.1 练习 1.1.13: “设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\nearrow$, $f(0)>0$, $f(1)<1$. 试证: $\exists\ x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0^2$. (福建师范大学)”

2.1 连续性的证明与应用

练习 2.1.1 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$ 的连续性.

练习 2.1.2 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0\end{cases}$. 试研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性. (东北重型机械学院)

练习 2.1.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 置 @跟锦数学微信公众号

$$R(x)=\sup_{0\leqslant y\leqslant x}f(y),\quad G(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{R(x)}\right]^n,\quad\forall\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

试证: 当且仅当 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单增时, G 是连续的. (吉林工业大学)

练习 2.1.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒大于零, 按 $\varepsilon-\delta$ 定义证明: $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上连续. (长沙铁道学院)

练习 2.1.5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且 $f(0)=f(1)=0$, 则任意一个实数 l $(0<l<1)$, 必有实数 x_0 $(0\leqslant x_0\leqslant 1)$, 使 $f(x_0)=f(x_0+l)$. (上海交通大学)

练习 2.1.6 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 证明: 在 (a,b) 内存在点 ξ 使 @跟锦数学微信公众号

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.\ \text{(华中理工大学, 长春理工大学)}$$

练习 2.1.7 设 $f(x)$ 在 $[a,a+2\alpha]$ 上连续, 证明: 存在 $x\in[a,a+\alpha]$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x+\alpha)-f(x)=\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)-f(a)].\ \text{(北京大学)}$$

练习 2.1.8 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, 且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处达最小值, 若 $f(a)<a$, 证明: $F(x)=f(f(x))$ 至少在两点达到最小值. (哈尔滨工业大学)

练习 2.1.9 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=f(1)$, 则对任何自然数 $n\geqslant 2$, 存在 $\xi_n\in[0,1]$, 使得 $f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)=f(\xi_n)$. (湖北大学)

练习 2.1.10 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$ $(n=2,3,\cdots)$. 证明: (1) 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 有唯一的实根 x_n; (2) 数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (北京师范大学, 吉林大学)

练习 2.1.11 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x \text{ 为有理数},\\ x(1+x), & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 的连续性与可微性. (内蒙古大学)

练习 2.1.12 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明:如果 $y=f(\mu)$ 在点 μ_0 连续, $\mu=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $\mu_0=\varphi(x_0)$, 则 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续. (北京科技大学)

练习 2.1.13 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\sin x$, 讨论 $f[g(x)]$ 的连续性. (南京大学)

练习 2.1.14 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处连续且为一一映射, 则 $f(x)$ 必为严格单调. (华东师范大学)

练习 2.1.15 如果 $y=f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (A 为有限数), 则 $y=f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. (复旦大学)

练习 2.1.16 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$, 试证: $f(x)$ 在 (a,b) 上有最大值. (西北大学)

练习 2.1.17 若函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 令 @跟锦数学微信公众号

$$M_f(x_0,\delta)=\sup\{f(x);\ x\in D,\ |x-x_0|<\delta\},$$
$$m_f(x_0,\delta)=\inf\{f(x);\ x\in D,\ |x-x_0|<\delta\},$$

证明: (1) 当 $\delta\to 0^+$ 时 $M_f(x_0,\delta)-m_f(x_0,\delta)$ 的极限存在; (2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是: $\lim\limits_{\delta\to 0^+}[M_f(x_0,\delta)-m_f(x_0,\delta)]=0$. (西北大学)

练习 2.1.18 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 试证函数 @跟锦数学微信公众号

$$m(x)=\inf_{a\leqslant t<x}f(t), M(x)=\sup_{a\leqslant t<x}f(t)$$

在 $[a,b]$ 上左连续, 并举例说明它们可以不右连续.

练习 2.1.19 已知 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant x<1\\ k+1, & k\leqslant x<k+1\end{cases}\qquad (k=1,2,3,\cdots).$$

求函数 $g(y)=\sup\limits_{f(x)\leqslant y}x$ 在 $y\geqslant 0$ 时的具体表达式, 并指出 $g(y)$ 在各点处的左右连续性. (北京航空航天大学)

练习 2.1.20 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上定义, 并且有界, $a,b>1$ 为二常数, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a}$ 时, 有 $f(ax)=bf(x)$, 试证 f 在 $x=0$ 处右连续.

练习 2.1.21 设 $y=f(x)$ 为 $X\to Y$ 的连续函数, F 为 Y 轴上的闭集, 试证 $f^{-1}(F)$ 为 X 轴上的闭集.

练习 2.1.22 函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, f 单调, $x_0\in[a,b]$ 使得 $g(x_n)=f(x_{n=1})$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明: $\exists\ x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

练习 2.1.23 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内连续, 有界. 试证: $\forall\ T$, $\exists\ x_n\to+\infty$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

练习 2.1.24 f 在 $[0,n]$ 上连续 (n 为自然数), $f(0)=f(n)$. 试证: 至少存在 n 组不同的解 (x,y) 使得 $f(x)=f(y)$, 且 $y-x>0$ 为整数.

练习 2.1.25 用确界存在原理 (非空有上 (下) 界数集必有上 (下) 界) 证明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)\cdot f(b)<0$, 则存在一点 $c\in(a,b)$, 使 $f(c)=0$. (西北大学)

练习 2.1.26 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)\cdot f(b)<0$, 应用闭区间套原理证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$. (北京科技大学)

练习 2.1.27 用有限覆盖定理证明连续函数的零点定理: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)\cdot f(b)<0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$. (四川大学)

练习 2.1.28 用闭区间套定理证明连续函数有界性定理, 即若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $M>0$, 对一切 $x\in[a,b]$, $|f(x)|\leqslant M$. (华中师范大学)

2.2 一致连续性

练习 2.2.1 设 f 是区间 I 上的实函数, 试证如下三条件有逻辑关系: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3). 1) f 在 I 上可导且导函数有界, 即: $\exists\ M>0$ 使得 $|f'(x)|\leqslant M$ $(\forall\ x\in I)$. 2) f 在 I 上满足 Lipschitz 条件, 即: $\exists\ L>0$ 使得 $|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$ $(\forall\ x',x''\in I)$.

3) f 一致连续.

练习 2.2.2 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 为了检验 f 在 I 上是否一直连续, 今设计如下的实验: 取一根内空直径为 ε 的圆形直管 $(\varepsilon>0)$, 截取长度为 δ 的一段 $(\delta>0)$, 将直管中轴与 x 轴平行放好. 然后让 $y=f(x)$ 的曲线平移从管内穿过. 若不论 $\varepsilon>0$ 怎么笑, 只要事先将直管长度 $\delta>0$ 取定足够短, 曲线就能平移穿过此管, 整个穿越过程, δ 无需改变, 那么 f 就在 I 上一直连续, 否则就是非一致连续. 问这种理解正确么? (注: 一致性主要体现在整个穿越过程, δ 无需改变上!)

练习 2.2.3 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 又在 $[b,c]$ 上一致连续, $a<b<c$. 用定义证明: $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上一致连续. (北京大学)

练习 2.2.4 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内满足 Lipschitz 条件. 证明 $f(x^\alpha)$ $(0<\alpha<1$ 为常数) 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. (武汉大学)

练习 2.2.5 证明: $y=\sin\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. (武汉大学)

练习 2.2.6 用不等式叙述 $f(x)$ 在 (a,b) 不一致连续. (内蒙古大学)

练习 2.2.7 证明: $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续. (中国科学院)

练习 2.2.8 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间 @跟锦数学微信公众号

$$J_1=\{x;-1<x<0\},J_2=\{x;0<x<1\}$$

内一致连续. 但在 $J_1\cup J_2=\{x;\ 0<|x|<1\}$ 非一致连续. (北京航空航天大学)

练习 2.2.9 证明: 周期函数只要连续必定一致连续.

练习 2.2.10 证明: 在区间 I 上一致连续的二函数的和与差仍在 I 上一致连续.

练习 2.2.11 证明: 若 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $y=f(x)$ 有极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=B.$$

则 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

练习 2.2.12 设单调有界函数 f 在区间 I $(I=(a,b)$ 或 $I=[a,+\infty))$ 上连续, 求证: f 在 I 上一致连续. (北京师范大学)

练习 2.2.13 在有限开区间 I 上一致连续的二函数之积仍一致连续. 问商的情况怎样? 无穷区间上关于积的结论是否还成立? 证明之.

练习 2.2.14 求证: $f(x)=\dfrac{x^{314}}{\mathrm{e}^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. (哈尔滨工业大学)

练习 2.2.15 设实函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 内处处可导, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}|f'(x)|=A$$

(有限或 $+\infty$). 证明: 当且仅当 A 为有限数时, f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. (清华大学)

练习 2.2.16 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有有界的导函数, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ 均存在且有限. 试证: (1) $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续; (2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在.

练习 2.2.17 若 $f(x),g(x)$ 在区间 I 上有有界导函数, 它们的乘积是否一致连续? 为什么?

练习 2.2.18 讨论下列函数在所给区间上的一致连续性. (1) $y=\sqrt{x}\ln x$, 在 $[1,+\infty)$ 上; (北京大学)

(2) $y=x\ln x$, 在 $(0,+\infty)$ 上; (武汉大学)

(3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$, $x\geqslant 0$; (中国人民大学)

(4) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$, 在 $\mathbb{R}$ 上;

(5) $y=\sqrt{x^3-x^2-x+1}$, 在 $\mathbb{R}$ 上;

(6) $y=\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2+1}}$, 在 $\mathbb{R}$ 上;

(7) $y=\left(8+\dfrac{1}{2}\cos^2 x\right)\sin 3x$, 在 $\mathbb{R}$ 上;

(8) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, 在 $\mathbb{R}$ 上;

(9) $y=x+\arctan\left[x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]$, $x>0$;

(10) $x=\dfrac{3at}{1-t^2}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$, $(-\infty<t<-1)$ 所决定的函数 $y=y(x)$.

练习 2.2.19 设 $f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上连续, 且 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 有渐近线 $y=ax+b$, 试证: $f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上一致连续.

练习 2.2.20 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-cx-d]=0$ (c,d 为常数), 求证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续. (北京师范大学)

练习 2.2.21 证明 $f(x)=\begin{cases}|x|\left(2x+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

练习 2.2.22 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 求证: 存在一函数 ψ 在 $(0,+\infty)$ 上具有性质: (1) ψ 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升, 且当 $t\geqslant b-a$ 时, $\psi(t)=$ 常数; (2) 对任意 $x',x''\in[a,b]$ 有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant\psi(|x'-x''|)$; (3) $\lim\limits_{t\to0^+}\psi(t)=0$. (北京师范大学)

2.3 上、下半连续

练习 2.3.1 完成定理 3 的证明.

练习 2.3.2 试对下半连续函数叙述定理 7 的对偶结果, 并作出证明.

练习 2.3.3 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上分别是上、下半连续的, 且 $f(x)\leqslant g(x)$, 证明:

(1) $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$, 当 $x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta$ 时, $f(x')-g(x'')<\varepsilon$.

(2) 试由此推出 Cantor 定理: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 必一致连续.

练习 2.3.4 假设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, $f(x)$ 在区间 I 上一致上半连续定义为: $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$, 当 $x',x''\in I$, $|x'-x''|<\delta$ 时, $f(x')-f(x'')<\varepsilon$. 试证: $f(x)$ 在 I 上一致上半连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 I 上一致连续.

练习 2.3.5 若函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 令 @跟锦数学微信公众号

$$M_f(x_0,\delta)=\sup\{f(x);\ x\in D,\ |x-x_0|<\delta\},$$
$$m_f(x_0,\delta)=\inf\{f(x);\ x\in D,\ |x-x_0|<\delta\},$$

证明: (1) 当 $\delta\to0^+$ 时 $M_f(x_0,\delta)-m_f(x_0,\delta)$ 的极限存在; (2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是: $\lim\limits_{\delta\to0^+}[M_f(x_0,\delta)-m_f(x_0,\delta)]=0$. (西北大学)

练习 2.3.6 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的函数, 满足条件: 对每一点 $x_0\in[a,b]$, 任取 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 对于一切 $x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. (1) 证明 $f(x)$ 有最大值; (2) 举例说明 $f(x)$ 未必有下界. (北京师范大学)

2.4 函数方程

练习 2.4.1 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(2x)=f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 证明: $f(x)\equiv A$, $x\in(0,+\infty)$. (天津大学, 湖北大学)

练习 2.4.2 试用推归法, 重新证明例 2.4.3 与例 2.4.4.

练习 2.4.3 证明: 在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(\forall\ x,y\in\mathbb{R})$ 的唯一单调函数是 $f(x)=ax$ (其中 a 为常数).

练习 2.4.4 证明: 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则如下三条件等价: (1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; (2) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续; (3) $\exists\ \delta>0$, $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 上有界.

练习 2.4.5 证明: 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微. (东北师范大学)

练习 2.4.6 证明: 当 $x>0$ 时满足方程 $f(xy)=f(x)f(y)\quad(\forall\ x,y>0)$ 的唯一不恒等于 0 的连续函数是 $f(x)=x^a$ (a 为常数).

练习 2.4.7 求在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $f(xy)=f(x)f(y),\quad(\forall\ x,y\in\mathbb{R})$ 的一切连续函数, 并证明不连续函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$, 在 $\mathbb{R}$ 上也处处满足方程.

练习 2.4.8 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续有界, 满足方程组 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f(x+y)&=f(x)f(y)+g(x)g(y),\\ g(x+y)&=f(x)g(y)+f(y)g(x)\end{aligned}\quad(\forall\ x,y\in\mathbb{R})\tag{3}$$

及 $f(0)=1$, $g(0)=0$. 证明: $f(x)=\cos ax$, $g(x)=\pm\sin ax$ (其中 a 为常数).

练习 2.4.9 设 $f(x)$ 为恒不等于零, 在 $x=0$ 处可导的函数, 在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$ $(\forall\ x,y\in\mathbb{R})$. 试证 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 并求 $f(x)$.

练习 2.4.10 证明: 满足方程 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ $(\forall\ x,y\in\mathbb{R})$ 的唯一可导函数是 $f(x)=\tan ax$ (其中 a 为常数).

练习 2.4.11 设 $f(x)$ 在任何有界区间上可积, 且在 $\mathbb{R}$ 上处处满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(\forall\ x,y\in\mathbb{R}).$$

试证: $f(x)=ax$ (其中 a 为常数).

3.1 导数

练习 3.1.1 计算下列函数的指定导数:

(1) $f(x)=\sqrt{\frac{(1+x)\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{x-1}}}+\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f'(1)$. (中国人民大学)

(2) $f(x)=x^{\sin(\sin x^x)}\ (x>0)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. (复旦大学)

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$. (华东师范大学)

(4) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$ (n 个 f), 求 $\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}$. (西北工业大学)

(5) $f''(u)$ 存在, $y=f(x+y)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. (中国地质大学)

(6) $y=y(x)$ 为 $y=-y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y\sin x-7x$ 所确定的可微函数, 求 $y'(0)$. (浙江大学)

(7) $f(x)$ 有任意阶导数, $f'(x)=[f(x)]^2$, 求 $f^{(n)}(x)\ (n>2)$. (数学一)

(8) $x=a(1-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. (中国海洋大学)

(9) $f^{-1}(x)$ 为 $f(y)$ 的反函数, $f'[f^{-1}(x)]$, $f''[f^{-1}(x)]$ 都存在, 且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$, 证明: $\frac{\mathrm{d}^2f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$. (湖南大学) .

(10) 对于 $\mathbb{R}$ 上的实函数, 若所论的导数存在, 试证有如结论: 奇函数的导数为偶函数, 偶函数的导数为奇函数. 如果将次结论简记作: (奇)'=偶, (偶)'=奇, 则显然有: $(奇)^{(2n)}=奇$, $(奇)^{(2n-1)}=偶$, $(偶)^{(2n-1)}=奇$, $(偶)^{2n}=偶$, (奇) $(0)=0$, $(奇)^{2n}$ $(0)=0$, $(偶)^{2n-1}$ $(0)=0$ $(n=1,2,\cdots)$.

(11) 设 $f(x)=\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sin^4x}{1+\cos^2x}$, 求 $f^{(6)}(0)$ 及 $\int_{-1}^{1}f^{(6)}(x)\,\mathrm{d}x$. (中国人民大学)

(12) 求 $\mathrm{d}^n(x^2\ln x)$ ($x>0$, x 为自变量). (南京大学)

(13) $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无穷次可微, 且 $\exists\ M>0$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|g^{(n)}(x)|\leqslant n!M, g\left(\frac{1}{n}\right)=\ln(1+2n)-\ln n\ (n=1,2,3,\cdots).$$

求 $g^{(k)}(0)\ (k=0,1,2,\cdots)$. (中国科学院)

(14) $f(x)=x\sin\omega x$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n(\omega^{2n}x\sin\omega x-2n\omega^{2n-1}\cos\omega x). \text{(北京理工大学)}$$

(15) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 求 $f^{(k)}(0)$. (华东师范大学)

练习 3.1.2 讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可微性. (东北大学)

练习 3.1.3 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ ax^{2}+b, & x>0,\end{cases}$ 其中 A,a,b 为常数, 试问 A,a,b 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 为什么? 并求 $f'(0)$. (郑州工业大学)

练习 3.1.4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, @跟锦数学微信公众号

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h),\quad (\text{当 } h\to 0 \text{ 时}),$$

求 a,b. (数学一)

练习 3.1.5 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上四次连续可微, $f'(0)=0$. 证明: 函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x^{2}}, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{f''(0)}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上二次连续可微. (吉林大学)

练习 3.1.6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\ \forall\ x,y\in[a,b],$$

其中 $M>0$, $\alpha>1$ 为常数, 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

练习 3.1.7 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充要条件为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\mathrm{e}^{h})}{h}$ 存在. (数学一)

不妨尝试对该题作一个小小的推广: 设 $x=g(h)$ 为: 具有反函数 g^{-1}, 且使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{g^{-1}(x)}$ 存在的某一函数 (例如 $x=1-\mathrm{e}^{h}$), 那么任一函数 $f(x)$, 若 $f(0)=0$, 则 f 在 $x=0$ 可导的充要条件是 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(g(h))}{h}$ 存在.

练习 3.1.8 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义. (1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0);$$

(2) 反之, 若上式左端之极限存在, 是否能推出 $f'(x_0)$ 存在? 若结论成立, 请证明, 不成立给出反例. (哈尔滨工业大学)

练习 3.1.9 在什么条件下, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^{n}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(n$ 为自然数$)$

(1) 在点 $x=0$ 处连续; (2) 在点 $x=0$ 处可导; (3) 在点 $x=0$ 处导函数连续. (中国科学院)

练习 3.1.10 试作一函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可微, 使得 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 其余处处连续.

练习 3.1.11 对于函数 $f(x)=|\sin x|^3$, $x\in(-1,1)$. (1) 证明: $f'''(0)$ 不存在; (2) 说明点 $x=0$ 是不是 $f'''(x)$ 的可去间断点.

练习 3.1.12 设函数 $f(x)$ 在点 a 处连续, 且 $|f(x)|$ 在 a 处可导, 证明: $f(x)$ 在 a 处也可导. (长沙铁道学院)

练习 3.1.13 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是多少? (数学一)

练习 3.1.14 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 分别讨论下面函数在 $x=a$ 处是否可导. (1) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$; (2) $f(x)=|x-a|\varphi(x)$; (3) $f(x)=(x-a)|\varphi(x)|$. (武汉水利电力大学)

练习 3.1.15 设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件. (数学一)

练习 3.1.16 求 $f(x)=[x]\sin\pi x$ 的单侧导数, 并讨论可微性. ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

练习 3.1.17 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的任何邻域内有不可微的点, 但在 $x=0$ 点可微.

练习 3.1.18 证明: 切比雪夫 (Tschebyscheff) 多项式 @跟锦数学微信公众号

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x),\quad m=0,1,2,\cdots$$

满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

练习 3.1.19 证明: 切比雪夫-拉盖尔 (Tschebyscheff-Laguerre) 多项式 @跟锦数学微信公众号

$$L_m(x)=\mathrm{e}^x(x^m\mathrm{e}^{-x})^{(m)},m=0,1,2,\cdots$$

满足方程 @跟锦数学微信公众号

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=0.$$

练习 3.1.20 设 $f(x)=\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \cdots & u_{1k}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \cdots & u_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1}(x) & u_{k2}(x) & \cdots & u_{kk}(x) \end{vmatrix}$ ($u_{ij}(x)$ 为 n 次可微函数). 试证: @跟锦数学微信公众号

$$f^{(n)}(x)=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n}\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}\begin{vmatrix} u_{11}^{(r_1)}(x) & u_{12}^{(r_1)}(x) & \cdots & u_{1k}^{(r_1)}(x) \\ u_{21}^{(r_2)}(x) & u_{22}^{(r_2)}(x) & \cdots & u_{2k}^{(r_2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1}^{(r_k)}(x) & u_{k2}^{(r_k)}(x) & \cdots & u_{kk}^{(r_k)}(x) \end{vmatrix}.$$

练习 3.1.21 设 $x=a\cos t+b\sin t$, $y=a\sin t-b\cos t$, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}-\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}t^m}=(a^2+b^2)\sin\frac{n-m}{2}\pi.$$

练习 3.1.22 对例 3.1.7 如下的证法给出评论, 认为正确请说明理由, 认为不正确请给出反例.

证. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A\Rightarrow f(2x)-f(x)=Ax+o(x)\\
&\Rightarrow f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)=A\frac{x}{2^k}+o\left(\frac{x}{2^k}\right)\\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^n\left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)=A\sum_{k=1}^n\frac{x}{2^k}+o\left(\sum_{k=1}^n\frac{x}{2^k}\right)\\
&\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=Ax(1-2^{-n})+o((1-2^{-n})x)\\
&\Rightarrow f(x)-f(0)=Ax+o(x)\quad (n\to\infty)\\
&\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A.
\end{aligned}$$

3.2 微分中值定理

练习 3.2.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)\cdot f'(b)>0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$. (哈尔滨工业大学, 华中理工大学, 华中师范大学)

练习 3.2.2 设 a,b,c 为三个实数, 证明: 方程 $\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$ 的根不超过三个. (浙江大学, 武汉汽车工业大学)

练习 3.2.3 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上可微, $f(x)g'(x)\neq f'(x)g(x)$. 证明: $f(x)=0$ 的两个根之间至少夹 $g(x)=0$ 的一根. (上海交通大学)

练习 3.2.4 设 $a^3-3b<0$, 试证: $x^3+ax^2+bx+c=0$ 仅有唯一实根.

练习 3.2.5 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x}x^n)$, $x\in(0,+\infty)$. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 n 个零点. (清华大学)

练习 3.2.6 证明 Tschebyscheff-Laguerre 多项式 $L_n(x)=\mathrm{e}^x\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x}x^n)$ 的所有实根都为正的.

练习 3.2.7 证明: Tschebyscheff-Hermite 多项式 $H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ 的所有根都是实数.

练习 3.2.8 证明: 当 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ 时, 方程 @跟锦数学微信公众号

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

在 $(0,1)$ 内至少有一实根. (南京邮电大学)

练习 3.2.9 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $x>a$ 时, $f'(x)>k>0$ (k 为常数), 证明: 当 $f(a)<0$ 时方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有且只有一个根. (湘潭大学, 西安交通大学, 西安电子科技大学等)

练习 3.2.10 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\quad \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

又存在一点 x_0, 使 $f(x_0)<0$, 试证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且只有两个实根. (上海交通大学, 浙江大学)

练习 3.2.11 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微, 且满足不等式 @跟锦数学微信公众号

$$0\leqslant f(x)\leqslant \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{x^2+1}},\ \forall\ x\in(0,+\infty).$$

试证明存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

练习 3.2.12 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)<0$, $f(b)<0$, 又有一点 $c\in(a,b)$, $f(c)>0$. 证明: 存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$. (西北大学)

练习 3.2.13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi)$. (华中理工大学)

练习 3.2.14 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, 试证: (1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$; (2) (a,b) 内至少存在 ξ, 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$. (数学一)

练习 3.2.15 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且三阶可导, 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有两个不同实根, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f^{(3)}(\xi)=0$. (华中师范大学)

练习 3.2.16 (综合试题) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可微, 且满足 $f(1)-2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证: 在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

练习 3.2.17 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 过点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$, 其中 $a<c<b$. 证明: 在 (a,b) 中至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$. (华中师范大学)

练习 3.2.18 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上二阶可微, 并且 $f(a)=f(b)$. 证明: 若存在一点 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)>f(a)$, 则必存在三点 $\xi,\eta,\zeta\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)>0$, $f'(\eta)<0$, $f''(\zeta)<0$. (吉林大学, 北京师范大学, 国防科技大学)

练习 3.2.19 函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 区间上的拉格朗日中值公式为 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x,\ \text{其中}\ 0<\theta<1,$$

且 θ 是与 $f(x)$ 与 x 有关的量, 对 $f(x)=\arctan x$, 求当 $x\to 0^+$ 时 θ 的极限值. (武汉大学)

练习 3.2.20 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可微. 证明: 存在 $\xi\in(1,2)$ 使得 $f(2)-f(1)=\dfrac{1}{2}\xi^2f'(\xi)$. (北京科技大学)

练习 3.2.21 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶导数. 试证: 存在点 $\xi\in(a,b)$ 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

练习 3.2.22 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在, 试证: $\forall\ c:\ a<c<b$, $\exists\ \xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

练习 3.2.23 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, $b>a>0$, 证明: 在

(a,b) 内存在 x_1,x_2,x_3, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^2}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}x_3\cdot f'(x_3).\text{（四川大学）}$$

练习 3.2.24 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $a\geqslant 0$ (或 $b\leqslant 0$). 试证:

(1) $\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ba+a^2)\frac{f''(x_3)}{3x_3^2};\text{（南京航空航天大学）}$$

(2) $\forall\ n\in\{1,2,\cdots\}$, $\exists\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=\cdots=(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+ba^{n-2}+a^{n-1})\frac{f'(x_n)}{nx_n^{n-1}}.$$

练习 3.2.25 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可微, 试证: (1) 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内亦有界; (北京师范大学) (2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内无解, 则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内亦无界. (华东师范大学)

练习 3.2.26 设 f 在 $[a,b]$ 中任意两点都具有介值性质: $c_1,c_2\in[a,b]$, $\forall\ r:f(c_1)<r<f(c_2)$, $\exists\ c$ 在 c_1,c_2 之间, 使得 $f(c)=r$. 而且 f 在 (a,b) 内可导, $|f'(x)|\leqslant k$ (正常数) $\forall\ x\in(a,b)$. 试证: f 在点 a 右连续. (同理在 b 左连续) (华东师范大学)

练习 3.2.27 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数. (1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限, 问 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 是否必定存在? (云南大学) (2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在且有限, 那么必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 试证明之. (云南大学, 哈尔滨工业大学等)

练习 3.2.28 设 $f(x)$ 于 $(0,1)$ 内可微, 且满足 $|f'(x)|\leqslant 1$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$. (哈尔滨工业大学)

练习 3.2.29 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 内可微, $f(0)=0$. 试证: (1) 若 $f'(x)$ 单调增加, 则 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. (同济大学, 武汉水利电力大学, 成都科技大学等) (2) 若 $f'(x)$ 单调递减, 则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减. (中国科学院)

练习 3.2.30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 (a,b) 内可微, 若存在极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=l$, 则右导数 $f'_+(a)$ 存在且等于 l. (北京大学, 湖北大学)

练习 3.2.31 设 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 证明: 不存在一个函数以 f 为其导函数. (中国科学院)

练习 3.2.32 证明: 若 $f''(0)$ 存在 (有限), 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^2}=f''(0).\text{(北京师范大学)}$$

练习 3.2.33 将上题结果推广到一般情况, 即若 $f^{(n)}(0)$ 存在 (有限), 则 (n 为自然数) $\lim\limits_{h\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^kf[(n-2k)h]}{(2h)^n}=f^{(n)}(0)$. (北京师范大学)

练习 3.2.34 (Schwarz 定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(x)$ 的广义二阶导数 @跟锦数学微信公众号

$$f^{[2]}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}$$

存在, 且恒为零. 试证: $f(x)=Ax+B$, (A,B 为常数).

练习 3.2.35 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)<f(b)$, 又设对一切 $x\in(a,b)$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$$

存在, 用 $g(x)$ 表示这一极限值. 试证: 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)\geqslant 0$. (南开大学)

(注意题目未假定导数存在)

3.3 Taylor 公式

练习 3.3.1 求 e^{2x-x^2} 包含 x^5 项的 Taylor 展开式. (北京大学).

练习 3.3.2 设 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微分, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在且有限, 试证: 在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ, 满足 $f''(\xi)=0$. (山东大学)

练习 3.3.3 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续二阶导数, 又设 $f(0)>0$, $f'(0)<0$, $f''(x)<0$ $(x\in[0,+\infty))$. 试证: 在区间 $\left(0,-\dfrac{f(0)}{f'(0)}\right)$ 内至少有一个点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$. (厦门大学)

练习 3.3.4 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域里存在四阶导数, 且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M$. 试证: 对于此邻域异于 x_0 的任何 x 均有 @跟锦数学微信公众号

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x)-2f(x_0)+f(x')}{(x-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{M}{12}(x-x_0)^2,$$

其中 x' 与 x 关于 x_0 对称.

练习 3.3.5 设 (1) $f(x),f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续; (2) $f(x)$ 在 (a,b) 内存在; (3) $f(a)=f(b)=0$; (4) 在 (a,b) 内存在点 c, 使 $f(c)>0$. 求证: 在 (a,b) 内存在 ξ, 使 $f''(\xi)<0$. (四川联合大学)

练习 3.3.6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=-1$, 求证: $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x)\geqslant 8$. (华中师范大学, 湖南大学, 北京师范大学)

练习 3.3.7 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant a$, $|f'(x)|\leqslant b$. 证明: 当 $0<x<1$ 时, $|f'(x)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$. (数学一)

练习 3.3.8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微, @跟锦数学微信公众号

$$|f''(x)|\leqslant M\ (0\leqslant x\leqslant 1), M>0, f(0)=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

证明: $|f''(x)|<\dfrac{M}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. (华中理工大学)

练习 3.3.9 设函数 $f(x),g(x),p(x)$ 有连续二阶导数, 试求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x)\\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h)\\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h)\end{vmatrix}. \text{(华中师范大学)}$$

练习 3.3.10 若当 $x\to 0$ 时使 $\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为尽可能高阶的无穷小量, 问数 a,b 应取什么值? 用 x 的幂级数写出此时的等价无穷小.

练习 3.3.11 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二次可微, $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$. (1) 试证存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|;$$

说明常数 4 是最好的 (即对任何 $M>4$, 总可找一具体的 $[a,b]$, 及其上满足条件的 $f(x)$, 使对一切 $\xi\in(a,b)$, 都有 $|f''(\xi)|<\dfrac{M}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$).

(2) 如果再设 $f(x)\neq$ 常数, 试证存在 $\eta\in(a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f''(\eta)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|. \text{(南开大学)}$$

3.4 不等式与凸函数

练习 3.4.1 (1) 设 $b>a>\mathrm{e}$, 证明: $a^b>b^a$; (数学一) (2) 比较 π^{e} 与 e^π 的大小. (复旦大学)

练习 3.4.2 设 $0<b\leqslant a$, 证明: $\dfrac{a-b}{a}\leqslant\ln\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a-b}{b}$. (兰州大学, 四川大学, 华中理工大学等)

练习 3.4.3 证明: $2^n\geqslant 1+n\sqrt{2^{n-1}}$ $(n\geqslant 1$ 为自然数$)$. (北京邮电大学)

练习 3.4.4 设 $f(x)$ 定义在 $[0,c]$ 上, $f'(x)$ 存在且单调下降, $f(0)=0$, 请用 Lagrange 中值定理证明: 对于 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$, 恒有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$. (复旦大学)

练习 3.4.5 试证: 当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x\geqslant (x-1)^2$. (数学一)

练习 3.4.6 设在 $[0,1]$ 上, $f''(x)>0$, 则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (　). (数学一)

A. $f(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

B. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

D. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

练习 3.4.7 已知在 $x>-1$ 里定义的可微函数 $f(x)$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

和 $f(0)=1$. (1) 求 $f'(x)$; (2) 证明: $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 满足 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$. (大连理工大学)

练习 3.4.8 已知 $x<0$, 求证: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1$. (中国地质大学)

练习 3.4.9 证明: $\dfrac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b}{a-b}<\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$. (国外赛题)

练习 3.4.10 证明: 对自然数 n, 有 $0<\dfrac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}-1<\dfrac{1}{2n}$.

练习 3.4.11 $x>1$, $r>1$, 证明: $x^r>1+r(x-1)+\dfrac{1}{2}r(r-1)\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

练习 3.4.12 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $|g''(x)|\geqslant m>0$ (m 为常数), 又 $g(a)=g(b)=0$. 证明: $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|\geqslant \dfrac{m}{8}(b-a)^2$. (北京师范大学)

练习 3.4.13 证明 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x\quad\left(0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$. (国外赛题)

练习 3.4.14 设 $0<x<y<1$ 或 $1<x<y$, 则 $\dfrac{y}{x}>\dfrac{y^x}{x^y}$. (中国科学院)

练习 3.4.15 若 $p>1$, 则对于 $[0,1]$ 内任一 x 有 @跟锦数学微信公众号

$$x^p+(1-x)^p\geqslant\frac{1}{2^{p-1}}.\ (\text{南京邮电大学})$$

练习 3.4.16 设 n 为自然数, $0<x<1$, 证明: $x^n(1-x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}n}$. (江西师范大学)

练习 3.4.17 设 $0<x<1$, 试证: $\displaystyle\sum_{i=1}^n x^i(1-x)^{2i}\leqslant\frac{4}{23}$. (中国科学院)

练习 3.4.18 求出使得下列不等式对所有自然数 n 都成立的最大的数 α 及最小的数 β: @跟锦数学微信公众号

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$ (中国科学院, 北京师范大学)

练习 3.4.19 证明: (1) 二凸函数之和仍为凸函数; (2) 二递增非负凸函数之积仍为凸函数.

练习 3.4.20 设 $0<\alpha<1, x, y \geqslant 0$, 证明: $x^\alpha y^{1-\alpha} \leqslant \alpha x+(1-\alpha) y$. (华中理工大学)

练习 3.4.21 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\forall\ x_1, x_2 \in[a, b],\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda) x_2] \geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda) f(x_2)$, 试证: 对任何 $T \in(0, b-a)$ 必存在 $x_0 \in(a, b)$, 使 $x_0+T \in[a, b], \dfrac{f(x_0+T)-f(x_0)}{T}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 即在 $[a, b]$ 上曲线 $y=f(x)$ 有任意长度 (不超过端点弦) 平行端点弦的弦. (广西大学)

练习 3.4.22 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $f''(x)>0$, 试证: 对于 $[a, b]$ 上任意两个不同的点 x_1, x_2 有 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$ (陕西师范大学, 天津大学等)

练习 3.4.23 设 $f(x)$ 是区间 I 上的严格凹函数, 即 @跟锦数学微信公众号

$$f(\lambda x_0+(1-\lambda) x_1)>\lambda f(x_0)+(1-\lambda) f(x_1), \quad \forall\ x_0, x_1 \in I,\ \forall\ \lambda \in(0,1).$$

试证: 若 f 有极大值 $f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 必为 f 在 I 上的严格最大值, 即 $\forall\ x \in I$, 有 $f(x)<f(x_0)$. 因而 f 的极大值若有必唯一.

3.5 导数的综合应用

练习 3.5.1 试确定 a, b, c 使 $y=x^3+a x^2+b x+c$ 在 $x=1$ 处有拐点, 在 $x=0$ 处有极大值 1. (无锡轻工业学院)

练习 3.5.2 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} \cos t\, \mathrm{d} t$. 试求 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的极大值与极小值. (北方交通大学)

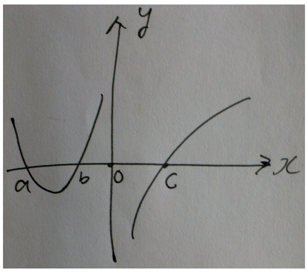
练习 3.5.3 作函数 $f(x)=|x+2| \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 图. (清华大学)

练习 3.5.4 写出下列函数的渐近线: (1) 曲线 $y=x \sin \dfrac{1}{x}\ (x>0)$. (数学一) (2) 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$. (数学一)

练习 3.5.5 已知一直线切曲线 $y=0.1 x^3$ 于 $x=2$, 且交此此曲线于另一点, 求此点坐标. (上海科技大学)

练习 3.5.6 试在一半径为 R 的半圆内作一面积最大的矩形. (山东大学)

练习 3.5.7 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数 $f'(x)$ 的图像如图所示, 问函数 $f(x)$ 由几个极大、极小值点. (数学一)



练习 3.5.8 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的严格递增函数, $g(x)$ 是某区间 I 上的函数, $x_0\in I$ 为内点 ($\exists\ \delta>0$, 使得 $U(x_0,\delta)\subset I$), 试证:

(1) $x=x_0$ 为 $g(x)$ 的极大 (极小) 值点 $\Leftrightarrow f(g(x))$ 亦以 $x=x_0$ 为极大 (极小) 值点.

(2) 函数 $g(x)$ 无极值 $\Leftrightarrow f(g(x))$ 亦无极值. f 在 $\mathbb{R}$ 上严 $\searrow$ 有类似结论.

练习 3.5.9 设 $g(x),h(x)$ 是某区间 I 上的两函数, $g(x)\neq h(x)$, 且 $h\neq 0$, 试证: 只有如下两种可能性:

(1) $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ 无极值 $\Leftrightarrow \dfrac{g(x)-h(x)}{g(x)+h(x)}$ 亦无极值;

(2) $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ 与 $\dfrac{g(x)-h(x)}{g(x)+h(x)}$ 有相同的极大、极小值点.

练习 3.5.10 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ 在 $(1,2)$ 内无极值.

练习 3.5.11 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且在 I 上无恒等于零的子区间, 若 $f(x)$ 在 I 上既有极大值又有极小值, 试证: 其极大、极小值只可能交替地出现, 并且每个极大值必比与之相邻的极小值大.

练习 3.5.12 一个圆锥面如果沿某一母线剪开, 展平, 就会得到一个扇形. 反之, 每个扇形可卷成圆锥面, 问半径为 R 的扇形中心角多大时, 卷成的圆锥面容积最大?

练习 3.5.13 求椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 在第一象限部分的切线, 使它被坐标轴截下的线段最短.

4.1 积分与极限

练习 4.1.1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}.$$

练习 4.1.2 考虑积分 $\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x$, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}.$$

练习 4.1.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 而且对任何 $x\in(0,1)$ 有 $|f'(x)|\leqslant M$. 求证: 对任何正整数 n 有 $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}$, 其中 M 是一个与 x 无关的常数. (南开大学)

练习 4.1.4 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 且在 $[0,T]$ 上可积. 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

练习 4.1.5 设 $s(x)=4[x]-2[2x]+1$ 其中 $[x]$ 代表数 x 的整数部分 (即不超过 x 的整数之最大值), n 代表自然数, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)s(nx)\,\mathrm{d}x=0.\ \text{(兰州大学)}$$

练习 4.1.6 设 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, $f_0(x)>0$. @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=\sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t},\ n=1,2,\cdots.$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, $(x\in[0,1])$.

练习 4.1.7 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(x)>0$, $g(x)>0$. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b g(x)f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^2}}.$$

练习 4.1.8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 @跟锦数学微信公众号

$$B_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right).$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty}n^2B_n=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$.

练习 4.1.9 设 @跟锦数学微信公众号

$$A_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},\quad B_n=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\cdots+\frac{2}{4n-1}.$$

试证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}n[\ln 2-A_n]=\frac{1}{4},\quad \lim_{n\to\infty}n^2[\ln 2-B_n]=\frac{1}{32}.$$

练习 4.1.10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $f_{in}=f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$. 试利用不等式 @跟锦数学微信公众号

$$|\ln(1+x)-x|\leqslant 2x^2,\ \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$$

证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+f_{1n}\frac{b-a}{n}\right)\left(1+f_{2n}\frac{b-a}{n}\right)\cdots\left(1+f_{nn}\frac{b-a}{n}\right)=\mathrm{e}^{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

练习 4.1.11 设 $f(x)$ 是在 $[-1,1]$ 上可积在 $x=0$ 处连续的函数, 记 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}(1-x)^n, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \mathrm{e}^{nx}, & -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=f(0).\ (\text{浙江大学})$$

练习 4.1.12 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\ (x>0)$. 求 $\lim_{n\to\infty}f(n)\sin\frac{1}{n}$. (福建师范大学)

4.2 定积分的可积性

练习 4.2.1 设函数 $f(u)$ 在区间 $[A,B]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 当 $x\in[a,b]$ 时, $A\leqslant g(x)\leqslant B$. 试用各种不同的方法证明 $f[g(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积.

练习 4.2.2 试用多种方法证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 设 (1) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$; (2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

练习 4.2.3 若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 试证 $\max\{f(x),g(x)\}$ 及 $\min\{f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上亦可积.

练习 4.2.4 试用定理 3 重新证明 Riemann 函数在 $[0,1]$ 上可积.

练习 4.2.5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $[f(x)]$ 表示 $f(x)$ 的值取整数部分. 试问 $[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上是否一定可积.

练习 4.2.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 试证: 对于 $[a,b]$ 上任一可积函数 $g(x)$, 恒有 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则函数 $f(x)$ 在连续点上恒为零.

练习 4.2.7 设在 $[-1,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足如下条件: 对 $[-1,1]$ 上的任意的偶连续函数 $g(x)$, 积分 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 试证: $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数. (武汉大学)

4.3 积分不等式及综合性问题

练习 4.3.1 证明: (1) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \sqrt{2}$; (2) $0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi^3}{144}$; (3) $\frac{2}{9}\pi^2 \leqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\pi^2$.

练习 4.3.2 证明: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x \leqslant x - \frac{1}{3\pi}x^3$.

练习 4.3.3 求证: $f(x) = \int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$ (n 为正整数) 在 $x \geqslant 0$ 上的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$. (西北大学)

练习 4.3.4 把满足下述条件 (1) 和 (2) 的实函数 f 的全体记作 F: (1) $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 并且非负; (2) $f(0)=0$, $f(1)=1$. 试证明: $\inf\limits_{f\in F} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 但不存在 $\varphi \in F$, 使 $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. (厦门大学)

练习 4.3.5 若 $f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续, 且 $f'(x) \geqslant 0$, 则对任意正整数 n, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2[f(2\pi)-f(0)]}{n}. \text{(东北师范大学)}$$

练习 4.3.6 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(x) \searrow$, $|f'(x)| \geqslant m > 0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}.$$

练习 4.3.7 $f(x) \neq 0$, 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$, 证明至少存在点 $c \in [a,b]$, 使 $|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

练习 4.3.8 将条件 $f(x) \neq 0$ 换为 $f''(x) < 0$, 重新证明例 4.3.5.

练习 4.3.9 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 \mathrm{d}t < \frac{\pi^2 n^2}{4}$.

练习 4.3.10 对自然数 $n \geqslant 2$, 证明 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| \mathrm{d}t < \frac{2+\ln n}{2}$.

练习 4.3.11 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且对于任何区间 $[\alpha,\beta]$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$, 不等式 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$ $(M,\delta$ 是正常数) 成立. 证明: 在 $[a,b]$ 上, $f(x)\equiv 0$. (国外赛题)

练习 4.3.12 证明: 若 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 且对一切 $x\in[0,1]$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\geqslant f(x)\geqslant 0,$$

则 $f(x)\equiv 0$. (上海师范大学)

练习 4.3.13 证明: 如果在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_x^{x+1} f(x)\,\mathrm{d}t=0$, 那么 $f(x)$ 是周期函数.

练习 4.3.14 设 $f(x)$ 处处连续, $F(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\mathrm{d}t$, 其中 δ 为任何正数. 证明: (1) $F(x)$ 对任何 x 有连续导数; (2) 在任意闭区间 $[a,b]$ 上, 当 δ 足够小时, 可使 $F(x)$ 与 $f(x)$ 一致逼近 (即任给 $\varepsilon>0$, 对一切 $x\in[a,b]$ 均有 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon$). (华东师范大学)

练习 4.3.15 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 满足 $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明: 存在自然数 N 及定数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 使 $\sum_{k=1}^N c_k^2=1$, $\max_{x\in[a,b]}\left|\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|>100$. (扬州师范学院)

练习 4.3.16 按牛顿二项式展开及代换 $x=\sin t$ 两种方法计算积分 $\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数). 并由此说明: $\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

练习 4.3.17 设在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续函数 $f(x)>0$, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{\tan t}{\sqrt{1+2\tan^2 t}}\,\mathrm{d}t.$$

求 $f(x)$ 的初等函数表达式. (复旦大学)

练习 4.3.18 设 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,\mathrm{d}t=1$, 试求正常数 a 与 b. (华中师范大学)

练习 4.3.19 求 $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\left(\sin\frac{3}{t}\right)f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 可微, 且已知 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=1$. (中国科学技术大学)

练习 4.3.20 设 $a>0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微, 证明: @跟锦数学微信

公众号

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x.\ (\text{华中师范大学})$$

练习 4.3.21 设 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)=0$, 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.\ (\text{清华大学})$$

练习 4.3.22 设 $f\in C[0,1]$ (即 f 在 $[0,1]$ 上连续), 且在 $(0,1)$ 上可微, 若有 @跟锦数学微信公众号

$$8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0),$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. (北京大学)

练习 4.3.23 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(x)>0$. 又 @跟锦数学微信公众号

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

试证: (1) $F'(x)\geqslant 2$; (2) $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根. (华中师范大学)

练习 4.3.24 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\sin t^2\,\mathrm{d}t$, 求证: $x>0$ 时, $|f(x)|<\dfrac{1}{x}$. (北京工业大学)

练习 4.3.25 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\int_0^h [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\,\mathrm{d}u=0,\quad (x\in[a,b]),$$

试证 $f(x)$ 为线性函数.

练习 4.3.26 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的凸函数, $f'(x)$ 有界. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0;\quad a_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n+1)x\,\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

练习 4.3.27 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的凸函数, $f'(x)$ 有界. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

练习 4.3.28 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 试证: $f(x)$ 为凸的充分必要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

对 $\forall\ [x-h,x+h]\subset[a,b]$ 时成立.

4.4 几个著名的不等式

练习 4.4.1 证明: $0.83<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}<0.95$.

练习 4.4.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=0$. 试证: $M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

练习 4.4.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 并且 $f(1)-f(0)=1$. 证明 $\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 1$. (国外赛题)

练习 4.4.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微 $(0<a<b)$, $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$. 试证: $\int_a^b x^2f'^2(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{4}$.

练习 4.4.5 试证: $0<q<p\Rightarrow\ln\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{\sqrt{pq}}$.

练习 4.4.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, $f(a)=f(b)=0$. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

并且 $\frac{b-a}{4}$ 不能再小.

练习 4.4.7 若 $u_1,u_2,\cdots,u_n\geqslant 0$, $u_1\cdot u_2\cdots u_n=1$, 则有 $u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant n$. 试证明这一结论, 并由它导出定理 3 (平均值定理).

练习 4.4.8 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数, 且 $n\geqslant 1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}.\text{ (中山大学)}$$

练习 4.4.9 设 $f(x)\nearrow$ 连续 (当 $x\geqslant 0$ 时), $f(0)=0$, $a,b\geqslant 0$, 试证: $ab\leqslant af(a)+bf^{-1}(b)$.

练习 4.4.10 若 $\forall\ i,j$ 有 $(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0$, 则 a_i,b_i 称为似序的. 若恒有相反的不等式, 则称之为反序的. 试证: a_i,b_i 似序时 $\sum\limits_{i=1}^n a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^n b_i\leqslant n\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i$, a_i,b_i 反序时不等式反号. 等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 或 $b_1=\cdots=b_n$ 时成立. (Chebyshev)

4.5 反常积分

练习 4.5.1 计算 (1) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (b>a)$. (2) $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}\ (a>1)$.

练习 4.5.2 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^n}$. (中国科学院)

练习 4.5.3 求 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x^p+x^{-p})\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (函数 $f(x)$ 连续).

练习 4.5.4 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

练习 4.5.5 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

练习 4.5.6 证明 $\displaystyle\int_0^{\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{A}\int_0^{\infty} f(y^2)\,\mathrm{d}y$ (其中左、右积分存在, 且 $A,B>0$).

练习 4.5.7 研究下列积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,\mathrm{d}x$ (n 为自然数).

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin^2\left[\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x$.

练习 4.5.8 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上可微; 且 $x\to\infty$ 时, $f'(x)$ 单调递增趋于 $+\infty$, 则 $\displaystyle\int_a^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^{\infty}\cos f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛.

练习 4.5.9 设 $f(x)$ 为连续实值函数, 对所有 x, 有 $f(x)\geqslant 0$, 且 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, 求证: $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{n} xf(x)\,\mathrm{d}x\to 0\quad(n\to\infty)$. (中国科学院)

练习 4.5.10 证明 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=0$.

练习 4.5.11 设 $f(x)$ 是 $0\leqslant x<\infty$ 上的非负连续函数并满足 (1) 在 $0\leqslant x<\infty$ 上存在有界导数 $f'(x)$; (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$. 求证: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.\ (\text{山东大学})$$

练习 4.5.12 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 问能否断定: $\exists\, x_n\to\infty$, 使 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x_n)=0$? 为什么? (南开大学)

练习 4.5.13 设 $f(x)$ 于任一有限区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上正常可积, 于 $[0,\infty)$ 上绝对可积, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. (南京大学)

练习 4.5.14 若函数 $p(t)$ 在 $[0,\infty)$ 连续, 且当 $t\to+\infty$ 时, $p(t)=o(t^N)$ (N 为正整数). 又 $\lambda<0$, 证明: 当 $t\to\infty$ 时, $\displaystyle\int_t^{\infty} p(\tau)\mathrm{e}^{\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau=o(t^{N+1})\mathrm{e}^{\lambda t}$. (北京师范大学)

练习 4.5.15 $\{C_n^k\}_{k=0}^n$ 而二项式系数, A_n,G_n 分别表示它们的算术平均值与几何

平均值. 试证: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

练习 4.5.16 例 4.5.37 的逆命题不成立, 即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)$ 存在, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 可以不收敛.

练习 4.5.17 已知积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$ (见例 7.1.38), 求积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cos xt}{x}\,\mathrm{d}x.\ (\text{华北电力学院}).$$

练习 4.5.18 证明: $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. (北京航空航天大学)

5.1 数项级数

练习 5.1.1 设 k,i,j 都是自然数, 且 $k=i+j$, 试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(kn-i)(kn+j)}$ 的和.

练习 5.1.2 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_{n+1}-a_n=d>0\ (n=1,2,\cdots)$, m 为一正整数. 计算 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+m}}$.

练习 5.1.3 证明级数 $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$ 发散到 $+\infty$. (吉林大学)

练习 5.1.4

证明: 当 $p\geqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$. (国外赛题)

练习 5.1.5

证明: 若删去调和级数中所有分母含有数字 9 的项, 则新级数收敛, 且和小于 80.

练习 5.1.6 证明下列级数收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$. (东北师范大学)

练习 5.1.7

设 $a_n=n^{n^{\alpha}}-1$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

练习 5.1.8 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$$

仍收敛, 其中 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. (云南大学)

练习 5.1.9 证明: 若有 $\alpha>0$, 使当 $n \geqslant n_0$ 时, $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1+\alpha\ (a_n>0)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$ 收敛; 若 $n \geqslant n_0$ 时, $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$, 则这级数发散 (对数判别法).

练习 5.1.10 序列 $\{x_n\}$ 是正项单调递增并且有界, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛. (国外赛题)

练习 5.1.11

证明: 若 $a_n>0$, $a_n \searrow 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ $(p_m=\max\{n; a_n \geqslant 2^{-m}\})$ 同时敛散. (Lobachevsky 判别法)

练习 5.1.12 设 $0<x_1<\pi$, $x_n=\sin x_{n-1}\ (n=2,3,\cdots)$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 当 $p>2$ 时收敛; 当 $p \leqslant 2$ 时发散. (吉林大学)

练习 5.1.13 证明级数 $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots$ 发散.

练习 5.1.14

设 $a_n \neq 0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n=a\ (a \neq 0)$. 求证: 下列两级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$$

同时收敛或同时发散. (上海交通大学)

练习 5.1.15 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数, 周期为 1, 且 $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x=0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且有连续的一阶导数,

$$a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots.$$

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. (华东师范大学)

练习 5.1.16 设 $f(x)$ 于 $[1,\infty)$ 上可导, $f'(x)$ 单调递增, 且 $f(x) \to A$ (当 $x \to \infty$), 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

练习 5.1.17 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$. 试证: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ 收敛.

练习 5.1.18 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数, 且满足: (1) $f(x)>0$; (2) $|f'(x)|\leqslant m|f(x)|$, 其中 $0<m<1$. 任取 a_0, 定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})$, $n=1,2,\cdots$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛. (西安电子科技大学)

练习 5.1.19 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $0<p_n\nearrow+\infty$, 试证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$.

练习 5.1.20

设 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, na_n 单调, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n\ln n=0$.

练习 5.1.21

设数 $a>0$, $\{p_n\}$ 是一个数列, 并且 $p_n>0$, $p_{n+1}\geqslant p_n$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^a}$ 收敛. (国外赛题)

练习 5.1.22

举出一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的例子, 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ln n$ 发散.

练习 5.1.23 序列 $\{b_n\}\ (n=1,2,\cdots)$ 具有下列性质: $b_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$. 做出序列 $\{a_n\}$, 使 $a_n\geqslant0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=+\infty$. (国外赛题)

练习 5.1.24

设 $\{n_k\}$ 是自然数列 $\{n\}$ 的子序列, 试证: (1) 当 $n_k-n_{k-1}\geqslant1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$ 收敛; (2) 当 $n_k-n_{k-1}\leqslant g$ (常数) 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$ 发散; (3) 当 $n_k-n_{k-1}\geqslant k^r\ (r>0)$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$ 收敛.

练习 5.1.25

对函数 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(s>1)$, 证明: $\zeta(s)=s\int_1^{\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$, 其中 $[x]$ 为 x 的整数部分. (西北师范大学)

练习 5.1.26

(1) 求证: 当 $s>0$ 时, $\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 求证: 当 $s>1$ 时, $\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

练习 5.1.27

求 $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{2t}{t^2+1^2}+\frac{2t^2}{t^2+2^2}+\cdots+\frac{2t}{t^2+n^2}+\cdots\right)$.

练习 5.1.28

设 $k>0$, $a>0$. 证明: (1) $\int_a^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x\,\mathrm{d}x}{x^k}$ 收敛; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x\,\mathrm{d}x}{x^k}$ 收敛.

练习 5.1.29

证明: $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right\}$ 存在 (有限).

5.2 函数项级数

练习 5.2.1

设

(1) (i) $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $n=1,2,\cdots$; (ii) $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$; (iii) 在 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$, $n=1,2,\cdots$. 试证: $\mathrm{e}^{f_n(x)}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\mathrm{e}^{f(x)}$.

(2) 若将 (1) 中条件 (iii) 去掉, 则 $\mathrm{e}^{f_n(x)}$ 是否还一致收敛, 试证明你的结论. (河北师范大学)

练习 5.2.2 设 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(x+\frac{k}{n}\right),\ n=1,2,\cdots.$$

证明: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛. (兰州大学)

练习 5.2.3 设 $f_n(x)=\frac{\int_0^x(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}$, $g_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. 试证:

(1) $n\to\infty$ 时, $f_n(x)\rightrightarrows\begin{cases}-1, & -1\leqslant x\leqslant-\varepsilon,\\ 1, & \varepsilon\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\quad(0<\varepsilon<1)$.

(2) $g_n(x)\rightrightarrows|x|$ 关于 $x\in[-1,1]$, 当 $n\to\infty$ 时.

练习 5.2.4 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在区间 $[0,1]$ 上绝对收敛, 一致收敛, 但不是绝对一致收敛.

练习 5.2.5 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $0<x<+\infty$ 内是否一致收敛.

练习 5.2.6 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-(n-1)x}$ 关于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 是否一致收敛? (复旦大学)

练习 5.2.7 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^n}$ 的收敛性和一致收敛性 $(x \geqslant 0)$. (华东师范大学)

练习 5.2.8 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$ $(x \geqslant 0)$ 的一致收敛性. (南京大学)

练习 5.2.9 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 试证: 若对任何 $x \in [a,b]$, $\exists\ \delta_x > 0$, $G_x > 0$, 使对任意的 $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$ 与任意的自然数 n 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(y)\right| \leqslant G_x$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. (北京师范大学)

练习 5.2.10

设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$. 试证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在任意区间上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ 时 $nb_n \to 0$.

练习 5.2.11 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛 (即在任何内闭区间 $[a,b] \subset (-\infty,+\infty)$ 上一致收敛).

练习 5.2.12

指出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ 的收敛区间和一致收敛区间, 并证明之. (兰州大学)

练习 5.2.13 指出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{n} \ln\left(\dfrac{x^2}{n}+1\right)$ 的收敛于一致收敛的范围. (兰州大学)

练习 5.2.14 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, @跟锦数学微信公众号

$$f_1(x) = f(x),\ \ f_{n+1}(x) = \int_x^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall\ x \in [0,1],\ \ n = 1,2,\cdots.$$

求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续. (北京航空航天大学)

练习 5.2.15 (1) 证明函数列 $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n;\ n=1,2,\cdots\right\}$ 在 $x \in [0,1]$ 上对 n 单调增大; (2) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n+x)^n}{n^{n+1}}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

练习 5.2.16 试证: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 Dirichlet 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛. (陕西师范大学)

练习 5.2.17 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 上一致收敛.

练习 5.2.18 试证: $\forall\ \alpha:\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\left(1-\dfrac{2x}{\pi}\right)^n \tan^n x$ 在 $[0,\alpha]$ 上一致收敛. 若记其和函数 $S(x)$, 试证 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} S(x)=+\infty$. (北京师范大学)

练习 5.2.19 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ 在任何有穷区间上一致收敛, 而在任何一点都不绝对收敛. (华中科技大学)

练习 5.2.20 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(\ln x)^2$ 在 $[0,1]$ 区间上的一致收敛性. (北京大学)

练习 5.2.21 设 $g(x)$ 和函数列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且对任一 $x\in[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)$, 问能否断定 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$? 论证你的结论. (兰州大学)

练习 5.2.22 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n+1)xe^{-(n+1)x}]$ 在 $[0,+\infty)$ 内收敛, 但对任何 $A>0$, 级数在 $[0,A]$ 上不一致收敛, 再证: 上述级数在 $[0,+\infty)$ 内定义了一个连续函数, 问级数在 $[0,A]$ $(A>0)$ 上可否逐项积分? (南京大学)

练习 5.2.23 在 $(0,1)$ 内任取一数列 $\{a_n\}$ (各项互不相同), 作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-a_k|}{2^k}$. 证明: (1) 该级数在 $(0,1)$ 内定义一个连续函数 $f(x)$; (2) $f(x)$ 在 $x=a_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 处不可微, 而在 $(0,1)$ 内其他点处均可微. (南京大学)

练习 5.2.24 试作 $[0,1]$ 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$, 使之逐点收敛于连续函数 $f(x)$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\neq\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (安徽大学)

练习 5.2.25 n 取何值时, (1) $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上收敛; (2) $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 可在积分号下求导?

练习 5.2.26 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续. (西北大学)

练习 5.2.27 设 @跟锦数学微信公众号

$$y_{n+1}(x)=\psi(x)+\varphi(y_n(x)),\quad (x\in\mathbb{R}),\tag{4}$$

其中 $\psi(x)$ 是连续有界函数, $y_0(x)=y_0$, $\psi(x_0)=y_0-\varphi(y_0)$, φ 满足 Lipschitz 条件: @跟锦数学微信公众号

$$|\varphi(y')-\varphi(y'')|\leqslant\alpha|y'-y''|,\quad (0<\alpha<1).\tag{5}$$

试证: (1) $\{y_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛; (2) 记 $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$, 则 $y(x)$ 连续, 且 $y(x_0)=y_0$; (3) 若 $\psi(x)$ 一致连续, 则 $y(x)$ 也一致收敛. (武汉大学)

练习 5.2.28 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数 $f^{(n)}(x)$, 且任意区间 $[a,b]$ 上 $f^{(n)}(x)\rightrightarrows\phi(x)$ (当 $n\to+\infty$ 时), 求证: $\phi(x)=ce^x$ (其中 c 为常数). (北京大学)

练习 5.2.29 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. 求 (1) f 的连续范围; (2) f 的可导范围. (北京大学)

练习 5.2.30 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-2n}\cos 2^n x$, 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. (北京师范大学)

5.3 幂级数

练习 5.3.1 对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\ln n}{n}x^n$, (1) 求出收敛半径; (2) 讨论在收敛域端点上的收敛性; (3) 指出在什么样区间上级数一致收敛. (内蒙古大学)

练习 5.3.2 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 R_1, 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 有收敛半径 R_2, 则级数 (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$ 的收敛半径是怎样的.

练习 5.3.3 设 $a_n\geqslant0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 1, 和函数为 $f(x)$, 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散, 求证: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$.

练习 5.3.4 证明: $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足 $y^{(4)}=y$. (中国科学院)

练习 5.3.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$. (四川师范大学)

练习 5.3.6 设序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足: $a_n>0$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛, 当 $x=1$ 时发散, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=A$, $(0\leqslant A<+\infty)$, 证明: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}=A$. (南京大学)

练习 5.3.7 设 $\dfrac{v_n}{v_{n-1}}=a\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ $n=2,3,\cdots$, $|a|<1$, @跟锦数学微信公众号

$$x_{n+1}=x_n+cv_n^2,\ n=1,2,\cdots,c>0.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

练习 5.3.8 设 $a_n \geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $-1<x<1$ 时收敛并且有上界, 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 存在; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

练习 5.3.9 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$. 令 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. 求证: 当 $n\to+\infty$ 时, $f(f_n(x))\rightrightarrows f(f(x))\ (a\leqslant x\leqslant b)$.

练习 5.3.10 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n-1}$ 的收敛区间与和函数. (华中师范大学)

练习 5.3.11 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)3^n}=\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi\sqrt{3}-9}{18}.\ (\text{西南师范大学})$$

练习 5.3.12 验证积分 $\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 存在且等于 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. (湘潭大学)

练习 5.3.13 试证: $\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\ln\frac{x}{t}\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\quad(|x|\leqslant 1)$ (四川大学)

练习 5.3.14 证明: $A=\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$, $B=\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$, $C=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

练习 5.3.15 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径大于 0, 证明: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n=0$; (2) 如果 $a_1\neq 0$, 并且在原点的一个邻域里, $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right|\geqslant |a_1||x|-2x^2$ 逐点成立, 那么 $|a_2|\leqslant 2$. (厦门大学)

5.4 Fourier 级数

练习 5.4.1 设 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛, 试证它必是 $[-\pi,\pi]$ 上其和函数的 Fourier 级数. (西北师范大学)

练习 5.4.2 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ (1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数; (2) 这级数收敛吗? 收敛于 $f(x)$ 吗? 为什么? (3) 这级数在区间 $(-\pi,\pi)$ 里一致收敛吗? 为什么? (厦门大学)

练习 5.4.3 已知 f 是以 2π 为周期的可积函数, 它的 Fourier 系数为 a_n, b_n $(n \geqslant 0)$, 求函数 $f_h(x)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ $(h \neq 0)$ 的 Fourier 系数 A_n, B_n $(n \geqslant 0)$. (西北师范大学, 合肥工业大学)

练习 5.4.4 试将 $f(x)=-\pi-x$ 在 $(-\pi, 0)$ 内展开成正弦级数, 并判断此级数在 $(-\pi, 0)$ 是否一致收敛. (河北师范大学)

练习 5.4.5 试将周期函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 展成 Fourier 级数. (哈尔滨工业大学)

练习 5.4.6 已知 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}$, (1) 在 $[-\pi, \pi]$ 上将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数; (2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+(2n)^{2}}$ 之和. (天津大学)

练习 5.4.7 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且 $f(x)=x$, $-\pi<x<\pi$, 求 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的 Fourier 级数, 它们的 Fourier 级数是否一致收敛 (给出证明)? (北京大学)

练习 5.4.8 在 $[0, \pi]$ 上展开 $f(x)=x+\cos x$ 为余弦级数. (华中理工大学)

练习 5.4.9 试利用练习 5.4.2 的结果, 求出 $g(x)=\operatorname{sgn} x$, $h(x)=|x|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 展开式.

练习 5.4.10 设 $f(x)=x$, $x \in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 试将 $f(x)$ 展成 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x$ 型的三角级数.

练习 5.4.11 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, $[-\pi, \pi]$ 上可积, a_n, b_n 是它的 Fourier 系数. 试证:

$$(1)\ f(-x)=f(x),\ f(\pi-x)=-f(x) \Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}b_{n}=0, & (n=1,2, \cdots), \\ a_{2n}=0, & (n=0,1,2, \cdots);\end{array}\right.$$

$$(2)\ f(-x)=f(x),\ f(\pi-x)=f(x) \Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}b_{n}=0, & (n=1,2, \cdots), \\ a_{2n-1}=0, & (n=1,2, \cdots);\end{array}\right.$$

$$(3)\ f(-x)=-f(x),\ f(\pi-x)=-f(x) \Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}a_{n}=0, & (n=0,1,2, \cdots), \\ b_{2n-1}=0, & (n=1,2, \cdots);\end{array}\right.$$

$$(4)\ f(-x)=-f(x),\ f(\pi-x)=f(x) \Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}a_{n}=0, & (n=0,1,2, \cdots), \\ b_{2n}=0, & (n=1,2, \cdots).\end{array}\right.$$

练习 5.4.12 求下列函数在指定区间上的 Fourier 级数:

(1) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}x, & x \in[0, \pi] \\ 2, & x \in[-\pi, 0)\end{array}\right.$, 于 $[-\pi, \pi]$ 上; (中山大学)

(2) $f(x)=x+x^2$, 于 $[-\pi,\pi]$ 上 (并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; (长沙铁道学院)

(3) $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$, 于 $(0,2\pi]$ 上 (并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$); (复旦大学)

(4) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\end{cases}$, 于 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (并求和函数); (湘潭大学)

(5) $f(x)=x$, $x\in(0,2)$, 按余弦展开; (国防大学)

(6) $f(x)=1$, $x\in(0,\pi]$, 按正弦展开 (并求和函数). (南京大学)

练习 5.4.13 求函数 $f(x)=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 里的 Fourier 级数展开式.

练习 5.4.14 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln(n+1)}$ 不可能是某个可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

练习 5.4.15 写出 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\alpha\\ 0, & \alpha<|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数, 并根据 Parseval 等式求和 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$ (已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$).

练习 5.4.16 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则已知它的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 可表示为 Dirichlet 积分 @跟锦数学微信公众号

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

其中 $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt\equiv D_n(t)$ 称为 Dirichlet 核. $S_n(x)$ 的平均值 $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x)$ 称为 Cesáro 和. 试证:

(1) $D_0(x)+\cdots+D_{n-1}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$;

(2) $\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=1$;

(3) $\forall\ \delta>0$, $\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x\to 0\ (n\to\infty)$;

(4) 若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 则 $n\to\infty$ 时, $\sigma_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 于 $[-\pi,\pi]$ 上.

练习 5.4.17 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, $g_n(x) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x-u)}{\sqrt{1+\sin^2(x+u)}} S_n(u)\,\mathrm{d}u$. 试证: (1) 存在与 x, n 无关的数 K, 使得 $|g_n(x)| \leqslant K$ $(x \in [-\pi, \pi])$; (2) 当 $n \to \infty$ 时, $g_n(x) \rightrightarrows \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x-u)}{\sqrt{1+\sin^2(x+u)}} f(u)\,\mathrm{d}u$.

练习 5.4.18 设 $T_n(x)$ 为 n 阶三角多项式如下: @跟锦数学微信公众号

$$T_n(x) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx). \tag{6}$$

试证: (1) $\max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |T_n'(x)| \leqslant n^2 \max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |T_n(x)|$; (2) 若 $\alpha_{n-1} = 1$, 则 $\max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |T_n(x)| \geqslant \frac{\pi}{4}$.

6.1 欧氏空间 · 多元函数的极限与连续

练习 6.1.1 设 $l \in \mathbb{R}^m$, $|l| = 1$, θ_i 表示 l 与坐标矢量 e_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的夹角, 试证: $l = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_i)$.

练习 6.1.2 $x, y \in \mathbb{R}^m$, θ 表示 x, y 的夹角, 试证:

(1) 余弦公式 $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta$;

(2) 勾股弦定理: x 与 y 正交时, $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

练习 6.1.3 $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^m$ 是任意二开集, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, 试证: $G_1 \cap \bar{G}_2 = \varnothing$.

练习 6.1.4 设 $E \subset \mathbb{R}^m$ 为任意集合, E' 表示 E 的全体聚点组成的集合, 称为 E 的导集, 试证: E' 为闭集.

练习 6.1.5 设 $A, B \subset \mathbb{R}^m$ 为开集, $A \cap B = \varnothing$. 试证: $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

练习 6.1.6 设 $A, B \subset \mathbb{R}^m$, 为有界闭集, $A \cap B = \varnothing$, 试证: $\exists$ 开集 W, V, 使得 $A \subset W$, $B \subset V$, 且 $W \cap V = \varnothing$.

练习 6.1.7 设 $S \in \mathbb{R}^2$, $P_0(x_0, y_0)$ 为 S 的内点, $P_1(x_1, y_1)$ 为 S 的外点. 证明: 直线段 P_0P_1 必与 S 的边界 ∂S 至少有一个交点. (华东师范大学)

练习 6.1.8 求极限 (1) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$ (北京航空航天大学);

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1} - 1}$ (若极限不存在, 说明理由) (西北轻工业学院);

(3) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\arctan(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

练习 6.1.9 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$. 试讨论下面三种极限: (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$; (3) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. (南京工业学院)

练习 6.1.10 设 $f(x,y)$ 为二元函数, 在 (x_0,y_0) 附近有定义, 试讨论二重极限
@跟锦数学微信公众号

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的关系. (浙江大学)

练习 6.1.11 设 $f(x,y)$ 在 $G=\left\{(x,y);x^2+y^2<1\right\}$ 上有定义, 若 (1) $f(x,0)$ 在点 $x=0$ 处连续; (2) $f'_y(x,y)$ 在 G 上有界, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. (北京大学)

练习 6.1.12 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bar{D}\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 其值域为 R, 试证: $\forall\ \{u_n\}_{n=1}^\infty\subset R$, $\exists$ 收敛的子列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 及点 $(x_0,y_0)\in\bar{D}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}=f(x_0,y_0)$.

练习 6.1.13 设 $f(x,y)$ 在矩形 $D:-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$ $(a>0,b>0)$ 上分别是 x 和 y 的连续函数, 而且 $f(0,0)=0$. 当 x 固定时, $f(x,y)$ 是 y 的严格递减函数, 则有 $\delta>0$, 使对每个 $x\in(-\delta,\delta)$ 有 $y\in(-b,b)$ 满足 $f(x,y)=0$. (西南师院)

练习 6.1.14 设 $u=f(x,y,z)$ 在闭立方体 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, $a\leqslant z\leqslant b$ 上连续, 令 $\varphi(x)=\max\limits_{a\leqslant y\leqslant b}\left\{\min\limits_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z)\right\}$, 试证: $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (辽宁师范大学)

练习 6.1.15 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, $x\neq 0$ ($\mathbb{R}^n$ 中原点) 时, $f(x)>0$, 且 $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, 及 $c>0$ 有 $f(cx)=cf(x)$. 试证 $\exists\ a,b>0$, 使得 $a|x|\leqslant f(x)\leqslant b|x|$ $(\forall\ x\in\mathbb{R}^n)$.

练习 6.1.16 设 A 是 $n\times n$ 矩阵, $\det A\neq 0$, 试证: $\exists\ \alpha>0$, 使得 $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, 有 $|Ax|\leqslant\alpha|x|$.

练习 6.1.17 设连续函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$, 满足如下三条件: (1) $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)\geqslant 0$, 且 $x=0\Leftrightarrow f(x)=0$; (2) $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, 有 $f(\lambda x)=|\lambda|f(x)$; (3) $\forall\ x,y\in\mathbb{R}^n$, $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$. 试证: (i) $\exists\ M>0$, 使得 $f(x)\leqslant M|x|$; (ii) f 满足 Lipschitz 条件: 即存在 $L>0$, 使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$ $(\forall\ x,y\in\mathbb{R}^n)$; (iii) $\exists$ 常数 $a>0$, 使得 $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$ 有 $a|x|\leqslant f(x)$.

练习 6.1.18 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ 为连续函数, 试证: $E=\{x;f(x)=0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的

闭集.

练习 6.1.19 试对 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ 写出例 2.1.7 对应结果, 并给出证明.

练习 6.1.20 试对 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 写出例 2.1.6 的对应结果, 并给出证明.

练习 6.1.21 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中点 x_0 的邻域里有界, 记 @跟锦数学微信公众号

$$M_f(x_0,\delta)=\sup\left\{f(x);\ |x-x_0|<\delta\right\},\quad m_f(x_0,\delta)=\inf\left\{f(x);\ |x-x_0|<\delta\right\},$$

则极限 @跟锦数学微信公众号

$$\omega_f(x_0)\equiv\lim_{\delta\to0^+}[M_f(x_0,\delta)-m_f(x_0,\delta)]$$

存在, 并称之为 f 在 x_0 处的振幅. 试证: f 在 x_0 处连续的充要条件是 $\omega_f(x_0)=0$.

练习 6.1.22 设集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是非闭的, 函数 $f(x)$ 在 E 上一致连续. 试证: f 只能唯一地连续开拓到 $\bar{E}$ 上, 使在 $\bar{E}$ 上一致连续.

练习 6.1.23 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, $\lim\limits_{r\to+\infty}f(x)$ 存在. 试证: f 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

6.2 多元函数的偏导数

练习 6.2.1 设 $u=f(r,r\cos\theta)$ 有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2u}{\partial r\partial\theta}$. (复旦大学)

练习 6.2.2 设 $u=f(x-y,y-z,z-x)$, 假设 f 对其中变量有直到二阶的连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial z}$. (上海交通大学)

练习 6.2.3 设 $u=xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$, 求 $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$. (北京航空航天大学)

练习 6.2.4 设 f 为可微函数, $u=f(x^2+y^2+z^2)$ 和方程 $3x+2y^2+z^3=6xyz$. 试对一下两种情况分别求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处的值. (1) 由方程确定了隐函数 $z=z(x,y)$; (2) 由方程确定了隐函数 $y=y(z,x)$. (华中师范大学)

练习 6.2.5 设 $z=f(x,y)$, $u=x+ay$, $v=x-ay$, a 为常数, z 关于 u,v 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2z}{\partial u\partial v}$. (厦门大学)

练习 6.2.6 设函数 $u(x)$ 是由方程组 $u=f(x,y)$, $g(x,y,z)=0$, $h(x,z)=0$ 所确定, 且 $\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq0$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. (清华大学)

练习 6.2.7 设 f,F 可微, 且 $\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq0$, 求由 $\begin{cases}y=f(x,z)\\F(x,y,z)=0\end{cases}$ 所确定的函数 $y(x),z(x)$ 的一阶导数. (西安电子科技大学)

练习 6.2.8 设函数 $F_i(u)$, $i=1,2,3$ 可微, $A=|a_{ij}|$ 是一个三阶的函数行列式, 其中 $a_{ij}=F_i(x_j)$, $i,j=1,2,3$ 并且 x_3 是由方程 $x_2^2+x_3+\sin(x_2\cdot x_3)=1$ 所确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial A}{\partial x_1}$ 与 $\dfrac{\partial A}{\partial x_2}$ 在 $x_1=0, x_2=1, x_3=0$ 时的值. (西北大学)

练习 6.2.9 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 具有二阶连续导数, 并设 $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$. 试证: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. (中国科学院)

练习 6.2.10 证明: 若 u 是 x,y,z 的函数且 $\varphi(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{u_x'}{x}+\frac{u_y'}{y}+\frac{u_z'}{z}=\frac{1}{u}. \text{ (东北师范大学)}$$

练习 6.2.11 设 u,v,w 都是 x 的函数, 具有二阶连续偏导数, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\mathscr{W}(u,v,w)=\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

满足 $\mathscr{W}=u^3\mathscr{W}\left(1,\dfrac{v}{u},\dfrac{w}{u}\right)$. (西北师范大学)

练习 6.2.12 设 $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, $w=w(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 (a) $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial g}{\partial v}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}=-\dfrac{\partial g}{\partial v}$; (b) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$. 试证:

(1) $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=0$; (2) $w=w(x,y)=w(f(u,v),g(u,v))$ 满足 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. (北京大学)

练习 6.2.13 设 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数, $F(s,t)$ 有连续的一阶偏导数, 且满足 $F(u_x',u_y')=0$, $(F_s')^2+(F_t')^2)\neq 0$. 证明: $u_{xx}''u_{yy}''-(u_{xy}'')^2=0$. (华东师范大学)

练习 6.2.14 设 $u=x+y$, $v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, 试用 u,v 作为新自变量变换方程 @跟锦数学微信公众号

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

练习 6.2.15 通过变换 $u=x-2\sqrt{y}$, $v=x+2\sqrt{y}$, 变换方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, 假设所出现的偏导数都连续. (复旦大学)

练习 6.2.16 设 $z=f(x,y)$ 是二次连续可微函数, 又有关系式 $u=x+ay$, $v=x-ay$ (a 是不为零的常数). 证明: $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (北京大学)

练习 6.2.17 设 $u=f(r)$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

练习 6.2.18 若 $u(x,y)$ 的二阶导数存在, 证明 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件是 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$. (清华大学)

练习 6.2.19 以 $u=\frac{y}{x}$, $v=xy$ 作自变量, $w=x+y+z$ 作函数, 变换方程 @跟锦数学微信公众号

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\ (\text{长沙铁道学院})$$

练习 6.2.20 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求证: 在 $(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 连续但不可微.

练习 6.2.21 确定 α 的值使得函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 可微. (同济大学)

练习 6.2.22 设 $g(x,y)=\begin{cases}g(x,y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明: (1) 若 $g(0,0)=0$, $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微, 且 $\mathrm{d}g(0,0)=0$, 则 f 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$; (2) 若 g 在 $(0,0)$ 有偏导数, 且 f 在 $(0,0)$ 处可微, 则 $\mathrm{d}f(0,0)=0$. (武汉大学)

练习 6.2.23 设函数 $g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, $g(x_0,y_0)=0$, 且 $\exists\ M>0$, 使得 $|g(x,y)|\leqslant M\rho$ (在 (x_0,y_0) 的某个邻域内), 其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 试证: 任一函数 $f(x,y)$, 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 存在, 则 $z=f(x,y)g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微. (仿武汉大学试题)

练习 6.2.24 设 f'_x, f'_y 在 (x_0,y_0) 的某个邻域里存在, 在 (x_0,y_0) 的某个空心邻

域里 f''_{xy} 存在, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f''_{xy}(x,y)$ 存在, 试证: f''_{xy} 在 (x_0,y_0) 处连续, 且 $f''_{yx}(x_0,y_0)$ 存在, $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

练习 6.2.25 设二元函数 $F(x,y)$ 在直角坐标系中可写成 $F(x,y)=f(x)+g(y)$, 在极坐标系中 $F(x,y)=s(r)$, 试求 $F(x,y)$.

练习 6.2.26 设二元函数 $F(x,y)=f(x)g(y)$. (1) 在极坐标系中可表成 $F(x,y)=s(r)$, 求 $F(x,y)$; (2) 在极坐标系中可表成 $F(x,y)=\varphi(\theta)$, 求 $F(x,y)$.

6.3 多元 Taylor 公式凸函数几何应用极值

练习 6.3.1 写出函数 $f(x,y)=y^{2^x}$ 在点 $(1,1)$ 附近的 Taylor 公式 (写出二阶项, 余项形式可不具体写出). (兰州大学)

练习 6.3.2 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 在 $(0,0)$ 点带 Peano 余项的 Taylor 展开式至四阶项. (北京大学)

练习 6.3.3 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的 Taylor 展开式.

练习 6.3.4 $|x|$, $|y|$ 很小时, 求 $\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$ 的近似多项式, 准确到 x,y 的二次项.

练习 6.3.5 写出 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^1(1+x)^{t^2y}\,\mathrm{d}t$ 的 Maclaurin 级数的前面不为零的三项.

练习 6.3.6 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数, 当 $x=1$ 和 $y=1$ 时它的值为 $z=1$. 试写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

练习 6.3.7 求曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程. (四川联合大学)

练习 6.3.8 过直线 $l:\begin{cases}10+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切面, 求此切面方程. (长沙铁道学院)

练习 6.3.9 已知平面方程为 $lx+my+nz=p$ 与椭球面方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 证明系数满足方程 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$. (武汉水利电力大学)

练习 6.3.10 试证曲面 $S:\ xyz=a^2$ 在任何一点处的切平面与坐标面所围成的立体体积为定值. (合肥工业大学)

练习 6.3.11 证明: 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 的切平面在坐标轴上割下的诸线段, 其和为常量. (华东理工大学, 上海化工大学)

练习 6.3.12 求曲线 $C := xt,\ y = -t^2,\ z = t^3$ 上与平面 $\pi:\ x + 2y + z = 4$ 平行的切线方程. (大连理工大学)

练习 6.3.13 求曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程. (北京科技大学)

练习 6.3.14 求椭球面 $S:\ 3x^2+y^2+z^2=16$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(-1,2,3)$ 处的交角. (武汉测绘科技大学)

练习 6.3.15 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

练习 6.3.16 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上怎样的点, 椭球面的法线与三坐标轴成等角?

练习 6.3.17 证明: 锥面 $z = xf\left(\frac{y}{z}\right)$ 的切平面经过其顶点.

练习 6.3.18 求椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在坐标面上的投影.

练习 6.3.19 若 M_0 是 $f(x,y)$ 的极小点, 且在 M_0 处 f''_{xx}, f''_{yy} 存在, 试证在 M_0 点, $f''_{xx}+f''_{yy}\geqslant 0$. (江西师院)

练习 6.3.20 设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内有二姐连续的偏导数, 且 $f''_{xx}+f''_{yy}=0$, $f''_{xy}\neq 0$. 证明: $z=f(x,y)$ 的最大值, 最小值只能在区域的边界上取得. (华中师范大学)

练习 6.3.21 求曲面 $z=xy-1$ 上与原点最近的点的坐标. (中山大学)

练习 6.3.22 求两曲面: $x+2y=1$ 和 $x^2+2y^2+z^2=1$ 的交线上距原点最近的点. (中国科学院)

练习 6.3.23 在平面上求一点, 使它到 n 个定点 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots$, (x_n,y_n) 的距离之平方和最小. (西北工业大学)

练习 6.3.24 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截成一椭圆, 求原点至该椭圆最近、最远距离. (北京航空航天大学)

练习 6.3.25 求 $u=ky^3+zx$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geqslant 0$ 下的最大值和最小值. (清华大学)

练习 6.3.26 求函数 $u=x^2-y^2+2xy$ 在单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大、最小值. (北京科技大学)

练习 6.3.27 在直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 位于第一象限的那一段上求点, 使该点横坐标的余弦和纵坐标的余弦之乘积最大并求出最大值. (华中理工大学, 西北工业大学)

练习 6.3.28 求直线 $4x+3y=16$ 与椭圆 $18x^2+5y^2=45$ 之间的最短距离.

(华中理工大学)

练习 6.3.29 证明: 在光滑曲面 $F(x,y,z)=0$ 上离原点最近的点处的法线必经过原点. (武汉理工大学)

练习 6.3.30 利用导数证明周长一定的三角形中以等边三角形的面积最大 (清华大学).

练习 6.3.31 在曲面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ 上求一点, 使过该点的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小. (复旦大学)

练习 6.3.32 证明 $\sin x\sin y\sin(x+y)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$ $(0<x,y<\pi)$. 并确定何时等号成立. (中国科学院)

练习 6.3.33 若 $n\geqslant 1$ 及 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 试用求极值的方法证明不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

练习 6.3.34 用条件极值法证明不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2\quad(x_k>0,\ k=1,2,\cdots).$$

练习 6.3.35 设 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 证明: $n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)^{-1}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$.

练习 6.3.36 证明不等式 $\mathrm{e}^y+x\ln x-x-xy\geqslant 0$ $(x\geqslant 1,\ y\geqslant 0)$. (厦门大学)

练习 6.3.37 费马原则指出: 从 A 射出到达 B 的光线, 是沿费时最短的路线传播. 假设点 A 和点 B 位于以平面分开的不同的光介质中, 并且光的传播速度在二介质中分别为 v_1 与 v_2, 试由费马原则推出光的折射定律.

练习 6.3.38 如图, 设渠道的横断面为等腰梯形, 已知截面积为 S, 渠道为直的, 渠道表面由水泥砌成, 为使水泥最省, 问应如何选取渠道的深度 h 与腰的斜角 α.

练习 6.3.39 求 $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$ 所确定的 $y=y(x)$ 的极值.

6.4 隐函数存在定理及函数相关

练习 6.4.1 $P_0(x_0,y_0)$ 是右半平面 $(x>0)$ 内任意一点, 试证方程组 @跟锦数学微信公众号

$$u=\phi(x,y)=(\mathrm{e}^x+1)\sin y,\quad v=\psi(x,y)=(\mathrm{e}^x-1)\cos y$$

能在 P_0 的 (充分小的) 邻域内确定连续可微的反函数. (北京师范大学)

练习 6.4.2

设 @跟锦数学微信公众号

$$F(u,v,w,x,y)=uy+vx+w+x^2,\quad G(u,v,w,x,y)=uvw+x+y+1,$$

$P_0(2,1,0,-1,0)$, 又 $F(P_0)=0$, $G(P_0)=0$.

(1). 证明: 在 $(2,1,0)$ 的某一邻域内能由方程组 $F=0$, $G=0$ 定义唯一的一对函数 $x=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$.

(2). 求 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v,w)}|_{P_0}$. (上海师范大学)

练习 6.4.3 设函数 $f(x,y),g(x,y)$ 是定义在平面开区域 G 内的两个函数, 在 G 内均有连续的一阶偏导数, 且在 G 内任意点处, 均有 $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial f}\frac{\partial g}{\partial x}=0$. 又设有界闭区域 $D\subset G$. 试证: 在 D 中满足方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$ 的点至多有有限个. (武汉大学)

练习 6.4.4 已知方程 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$. (1). 在什么条件下, 由此二方程组能确定一条通过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线? (2). 在什么条件下, 上述曲线在点 P 处有切线? (3). 在什么条件下, 上述切线平行于 z 轴? (4). 导出上述曲线自点 (x_0,y_0,z_0) 至点 (x_1,y_1,z_1) 之间的一个弧长公式 (用函数 F,G 及其偏导数来表示). (5). 上述弧长公式成立的条件是什么? (华东师范大学)

练习 6.4.5 设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且 $F(x_0,y_0)=0$, $F'_x(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)>0$, $F''_{xx}(x_0,y_0)<0$. 试证: 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的定义于 x_0 附近的隐函数 $y=y(x)$ 在点 x_0 达到 (局部) 极小. (武汉大学)

练习 6.4.6 设 $\phi(x,y)$, $\phi'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域 $D:\ |x-x_0|,\ |y-y_0|\leqslant\Delta$ 上连续, 和 $|\phi'_y(x,y)|<\lambda<1$, $|\phi(x,y)|<(1-\lambda)\Delta$. 令 $y_n=y_0+\phi(x,y_{n-1})$, 则由 y_0 可依次得到 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$, $\cdots$. 试证此序列收敛, 且极限函数为隐式方程 $y=y_0+\phi(x,y)$ 的唯一连续解. (大连理工大学)

练习 6.4.7 设 $f(x)$ 是完备距离空间 (X,d) 上将 X 映为自身的连续映射, 若存在正实数列 $a_n\to0$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且 @跟锦数学微信公众号

$$d(f^n(x),f^n(y))\leqslant a_nd(x,y)\ \ (n\geqslant1,\ \ x,y\in X),$$

其中 $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$, $f^1(x)=f(x)$, $d(x,y)$ 表示空间中 x,y 两点的距离. 证明: $f(x)$ 在 X 内有唯一的一点 ξ, 使 $f(\xi)=\xi$. (吉林工业大学)

练习 6.4.8 设函数 $f(x)$ 当 $a<x<b$ 时连续, 并且函数 $\phi(y)$ 当 $c<y<d$ 时单调增加且连续. 问在怎样的条件下方程 $\phi(y)=f(x)$ 定义出单值的函数 $y=\phi^{-1}[f(x)]$? 研究例子: (1). $\sin y+\sinh y=x$; (2). $\mathrm{e}^{-y}=-\sin^2 x$.

练习 6.4.9 设 @跟锦数学微信公众号

$$x=y+\phi(y), \tag{7}$$

其中 $\phi(0)=0$ 且当 $-a<y<a$ 时 $\phi'(y)$ 连续并满足 $|\phi'(y)|\leqslant k<1$. 证明: 存在 $\delta>0$, 当 $-\delta<x<\delta$ 时存在唯一的可微分函数 $y(x)$ 满足方程 (7), 且 $y(0)=0$.

练习 6.4.10 方程 $xy+z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$ 在点 $(0,1,1)$ 的邻域内能否确定出某一变量为另二变量的函数.

练习 6.4.11 设 $y=y(x)$ 是方程 $x=ky+\phi(y)$ 所定义的隐函数, 其中常数 $k\neq 0$, 且 $\phi(y)$ 是以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\phi'(y)|<|k|$. 证明 $y=\dfrac{x}{k}+\psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 为以 $k|\omega|$ 为周期的周期函数.

练习 6.4.12 设 $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $F(x,y)\in\mathbb{R}^m$, F 有连续偏导数, @跟锦数学微信公众号

$$F=(F_1,F_2,\cdots,F_m),$$

Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\neq 0$, $y=y(x)=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x))$ 是方程 $F(x,y)=0$ 的隐函数.

(1). 证明: $\mathrm{d}y(x)=-[D_yF(x,y)]^{-1}D_xF(x,y)$, 其中 $\mathrm{d}y(x)$, $D_yF(x,y)$, $D_xF(x,y)$ 为矩阵: @跟锦数学微信公众号

$$\mathrm{d}y(x)=\begin{pmatrix}(y_1)'_{x_1}&(y_1)'_{x_2}&\cdots&(y_1)'_{x_n}\\(y_2)'_{x_1}&(y_2)'_{x_2}&\cdots&(y_2)'_{x_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(y_m)'_{x_1}&(y_m)'_{x_2}&\cdots&(y_m)'_{x_n}\end{pmatrix},$$

@跟锦数学微信公众号

$$D_xF=\begin{pmatrix}(F_1)'_{x_1}&(F_1)'_{x_2}&\cdots&(F_1)'_{x_n}\\(F_2)'_{x_1}&(F_2)'_{x_2}&\cdots&(F_2)'_{x_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(F_m)'_{x_1}&(F_m)'_{x_2}&\cdots&(F_m)'_{x_n}\end{pmatrix},$$

$$D_yF=\begin{pmatrix}(F_1)'_{y_1} & (F_1)'_{y_2} & \cdots & (F_1)'_{y_n}\\ (F_2)'_{y_1} & (F_2)'_{y_2} & \cdots & (F_2)'_{y_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (F_m)'_{y_1} & (F_m)'_{y_2} & \cdots & (F_m)'_{y_n}\end{pmatrix}.$$

(2). 证明: 当 $n=m$ 时 Jacobi 行列式有

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=(-1)^n\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\Big/\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}.$$

练习 6.4.13 设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的直角坐标系与球坐标

$$\begin{aligned}x_1&=r\cos\theta_1,\\ x_2&=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\ x_3&=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ x_{n-1}&=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\ x_n&=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}.\end{aligned}$$

(1). 证明:

$$\begin{aligned}F_1&\equiv r^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=0,\\ F_2&\equiv r^2\sin^2\theta_1-(x_2^2+\cdots+x_n^2)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ F_n&\equiv r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}-x_n^2=0.\end{aligned}$$

(2). 利用上题最后结果计算 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}$.

练习 6.4.14 设 $\phi(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有二阶连续偏导数的二次齐次函数: $\phi(tx,ty)=t^2\phi(x,y)$. (1). 证明: $\phi'_x=x\phi''_{xx}+y\phi''_{yx}$, $\phi'_y=x\phi''_{xy}+y\phi''_{yy}$; (2). 设 $\begin{vmatrix}\phi''_{xx} & \phi''_{xy}\\ \phi''_{yx} & \phi''_{yy}\end{vmatrix}\neq 0$. 证明当 $u=\phi'_x(x,y), v=\phi'_y(x,y)$ 时, 函数 $\phi(x,y)$ 可变成 $\psi(u,v)$ 的形式; (3). 证明 $\psi'_u=x$, $\psi'_v=y$; (4). 试将此结果推广到 $\mathbb{R}^n$ 空间.

练习 6.4.15 设 $\Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}\neq 0$. 证明: 对于二次曲线 $ax^2+2bxy+cy^2+$

$2\,\mathrm{d}x+2ey+f=0$ 有如下等式成立: $\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$.

练习 6.4.16 设 $\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$. 求 $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, d^2u 和 d^2v 在 $x=1, y=1, u=0$, $v=\dfrac{\pi}{4}$ 时的表达式.

练习 6.4.17 函数 $u=u(x)$ 由方程组 $u=f(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$ 定义. 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

练习 6.4.18 设一对一变换 @跟锦数学微信公众号

$$T:\left\{\begin{array}{l}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{array}\right.$$

在 D 上具有连续的偏导数 x_u', x_v', y_u', y_v', 且行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$, 则 T 将 uv 平面上由分段光滑闭曲线围成的闭区域 D 变成 xy 平面上相应闭区域 D' 且其边界也是分段光滑的闭曲线. (陕西师范大学)

练习 6.4.19 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$$

线性无关的充要条件是行列式 $\det(\alpha_{ij})\neq 0$, 其中 $\alpha_{ij}=\displaystyle\int_a^b f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x$.

练习 6.4.20 证明: 若一元函数组 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 在区间 (a,b) 上线性无关, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\begin{array}{cccc}\phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x)\\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x)\end{array}\right|\equiv 0\quad (x\in(a,b)).$$

练习 6.4.21 证明: $x=r\cos\theta\cos\phi$, $y=r\cos\theta\sin\phi$, $z=r\sin\theta$ 函数独立 (即函数无关).

练习 6.4.22 讨论下列函数的相关性:

(1). $\dfrac{x-y}{x-z}, \dfrac{y-z}{y-x}, \dfrac{z-x}{z-y}$;

(2). $\dfrac{x}{1-x-y-z}, \dfrac{y}{1-x-y-z}, \dfrac{z}{1-x-y-z}$.

练习 6.4.23 设函数组 $\left\{\begin{array}{l}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{array}\right.$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 中的函数 u,v 有处处连续一阶偏导数, 又当记 $W=(u,v)$, $P=(x,y)$, $|W|=\sqrt{u^2+v^2}$, $|P|=\sqrt{x^2+y^2}$

时, 存在数 $C>0$, 使得对于任意的 $P_1\in\mathbb{R}^2$, $P_2\in\mathbb{R}^2$ 成立不等式 $|W_2-W_1|\geqslant C|P_2-P_1|$. 这里, W_i 为与 P_i 相对应的点 $(i=1,2)$. 试证: Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$, $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. (武汉大学)

练习 6.4.24 设 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, 和 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ 都有连续的一阶偏导数, 证明行列式 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

6.5 方向导数与梯度

练习 6.5.1 计算函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿此点的等位线垂直的方向上的方向导数.

练习 6.5.2 计算函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在此点的内法线方向上的导数.

练习 6.5.3 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数. 若 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial l^2}=\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

练习 6.5.4 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, l_1,l_2,l_3 为三个垂直的方向. 证明:

(1). $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

(2). $\dfrac{\partial^2u}{\partial l_1^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial l_2^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial l_3^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$.

练习 6.5.5 求函数 $u=x+y+z$ 在沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线的方向导数, 并问在球面上怎样点上导数取: (1) 最大值; (2). 最小值; (3). 等于零.

7.1 含参变量积分学

练习 7.1.1 设 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\phi(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}$, 其中 $\phi(x)$ 及其导数 $\phi'(x)$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续. 证明: 当 $0<\alpha<a$ 时, 有 $I'(\alpha)=\dfrac{\phi(0)}{\alpha}+\displaystyle\int_0^\alpha\frac{\phi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,\mathrm{d}x$.

练习 7.1.2 在区间 $[1,3]$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=x^2$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_1^3(a+bx-x^2)\,\mathrm{d}x=\min.$$

练习 7.1.3 计算积分 (1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$. 设 $a,b\neq 0$.

(2). $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x$. (3). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

(4). $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$. (5). $\int_0^{\alpha}\arctan\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}\,\mathrm{d}x$. ($\alpha>0$) (北京科技大学)

练习 7.1.4 $J_(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\phi-x\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi$ 为 n 阶 Bessel 函数, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\pi}xJ_0(x)\,\mathrm{d}x=xJ_1(x).$$

练习 7.1.5 证明积分 $\int_0^{+\infty}x\sin(x^3-\lambda x)\,\mathrm{d}x$ 是 λ 的连续函数.

练习 7.1.6 证明积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tu^2}\sin t\,\mathrm{d}u$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 中一致收敛. (武汉大学)

练习 7.1.7 证明: (1). 积分 $\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 在 $(0<)a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上一致收敛, 在 $\alpha>0$ 非一致收敛. (2). 积分 $\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|\alpha-x|}}$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 上一致收敛.

练习 7.1.8 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可积, $x=0,+\infty$ 为奇点, 证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.\ (\text{东北大学})$$

练习 7.1.9 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $\int_0^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)\,\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x.\ (\text{江西大学})$$

练习 7.1.10 证明 $\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha x+1}{x^2+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. (长春地质大学)

练习 7.1.11 证明 $F(p)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,2)$ 上连续. (北京师范大学)

练习 7.1.12 证明函数 $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上有连续导数. (厦门大学)

练习 7.1.13 设 $\phi(x)$, $f(x)$ 是连续函数, 且 $\exists\ R>0$, 当 $|x|\geqslant R$ 时, $\phi(x)=0$. 证明: (1) 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\phi(x)f\left(\frac{x}{n}\right)\rightrightarrows\phi(x)f(0)$, $-\infty<x<+\infty$; (2) 若还有

$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(nx)f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$. (武汉大学)

练习 7.1.14 设对任意自然数 n, $f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且反常积分 $\int_a^{\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 n 一致收敛; 对任意 $M>a$, 在 $[a,M]$ 上, 有 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ (当 $n\to\infty$ 时), 证明: (1). 反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; (2). $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$. (武汉大学)

练习 7.1.15 设 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^3x^3}$, $x\in[0,+\infty)$, 证明: (1). $f_n(x)\rightrightarrows 0$, 关于 $x\in[0,+\infty)$, (当 $n\to\infty$ 时). (2). $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$. (武汉大学)

练习 7.1.16 已知: $\forall\ A>0$, $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上可积, 且在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积. 试证: (1). $\phi(x)=\int_0^{+\infty}f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t$ 连续. (2). 若将绝对可积条件去掉, 设 $f(x)$ 在某 $0<a\leqslant x<+\infty$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 问 $\phi(x)$ 是否还连续, 给出证明. (湘潭大学)

练习 7.1.17 求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>-1)$. (上海师范大学)

练习 7.1.18 证明 $F(x)=\int_{\mathrm{e}}^{\infty}\dfrac{\cos t}{t^x}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上连续可微. (厦门大学)

练习 7.1.19 设 $f(x)=\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$, $g(x)=\int_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. 试证: (1). $f(x)+g(x)\equiv C$ (常数), 并确定此常数. (2). $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. (河南师范大学, 天津大学)

练习 7.1.20 已知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, 试计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$. (广西师范大学)

练习 7.1.21 求积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$ 之值. (山东大学, 西安电子科技大学)

练习 7.1.22 设 $h_k=\int_a^b x^kh(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $h(x)>0$, 且连续, 令 @跟锦数学微信公众号

$$Q_n(x)=\begin{vmatrix}h_0&h_1&\cdots&h_n\\h_1&h_2&\cdots&h_{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\h_{n-1}&h_n&\cdots&h_{2n-1}\\1&x&\cdots&x^n\end{vmatrix}.$$

求证: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b x^k h(x) Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ (k=0,1,2,\cdots,n-1).\ (\text{北京航空航天大学})$$

练习 7.1.23 设 $f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, 其中 $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$. 证明: $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[4,A]$ $(A>4)$ 上一致收敛. (西北大学)

练习 7.1.24 利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

练习 7.1.25 设 $f(x)$ 为周期连续函数 $(-\infty<x<+\infty)$, @跟锦数学微信公众号

$$g(x)=\frac{1}{h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+u+v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

证明: $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\|g-f\|\leqslant\frac{1}{2}\omega_2(f,g)$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$\|g-f\| = \max_{-\infty<x<+\infty}|g(x)-f(x)|,$$
$$\omega_2(f,g) = \sup_{\substack{-\infty<x<+\infty\\0<\delta<h}}|f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)|.$$

练习 7.1.26 已知 $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ $(x>0)$. 证明 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)-f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

练习 7.1.27 设 $P(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ $(x\geqslant 0)$, $Q(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$ $(x\geqslant 0)$. 求证: P,Q 都满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$, 从而证明 $P\equiv Q$.

练习 7.1.28 求证: (1). $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-y^2}$.

(2). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+k\sin\theta}{1-k\sin\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\pi\arcsin k$ $(|k|<1)$.

练习 7.1.29 计算积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\phi+\sin\phi}{\cos\phi-\sin\phi}\right)^{\cos 2\alpha}\mathrm{d}\phi$.

练习 7.1.30 计算 A.J. Fresnel 积分 (1). $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$; (2). $\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

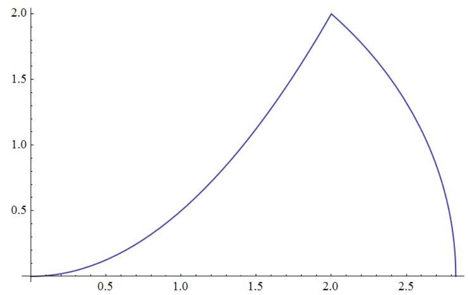
练习 7.1.31 试证: $\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\Gamma(s)(1-2^{1-s})\zeta(s)$ $(s>1)$, 其中 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

练习 7.1.32 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 在任意有穷区间 $[a,b]$ 上有界并可积, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$, 又设 α 是一实常数, $\frac{1}{2}<\alpha<1$. 证明: (1). 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-t)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛; (2). $\phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-t)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 连续. (北京大学)

7.2 重积分

练习 7.2.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b(b-x)f(x)\,\mathrm{d}x$. (华中理工大学)

练习 7.2.2 改变二次积分的次序: $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的顺序. (东北大学)



练习 7.2.3 设 $a>0$ 是常数, 计算积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. (北京大学)

练习 7.2.4 计算由椭圆 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ $(a_1b_2-b_1a_2\neq0)$ 所界的面积. (西北师院)

练习 7.2.5 设 f 是连续函数, 求证: $\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-A}^A f(\xi)\,(A-|\xi|)\,\mathrm{d}\xi$, 其中 $D:\ |x|\leqslant\frac{A}{2},\ |y|\leqslant\frac{A}{2}$.

练习 7.2.6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{\triangle OAB}f(1-y)f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2,$$

其中 $\triangle OAB$ 为 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$ 为顶点的三角形区域.

练习 7.2.7 证明: $\iint\limits_S f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,\mathrm{d}u$, 其中 $S:\ x^2+y^2\leqslant1$, $a^2+b^2\neq0$. (东北师范大学)

练习 7.2.8 计算曲面 $y=1-\sqrt{x^2+z^2}$ 与平面 $x=0$, $y=x$ 所围成的立体的体积. (福建师范大学)

练习 7.2.9 (1). 计算积分 $A=\int_0^1\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. (2). 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 $D:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续, 且满足下列条件: @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\quad \iint_D f(x,y)xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

证明存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}$, 此 A 为 (1) 中积分值. (北京大学)

练习 7.2.10 把正确的结论的编号填在题末的括号内. 若 $f(x,y)$ 在矩形 $G:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 上有定义, 且积分 @跟锦数学微信公众号

$$I_1=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

与 @跟锦数学微信公众号

$$I_2=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

都存在, 则 (1). $I_1=I_2$; (2). $I_1\neq I_2$; (3). 二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 存在; (4). 二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 可能不存在. 答: (　). (中山大学)

练习 7.2.11 改变三重积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 的积分次序. (1). 先 y 后 z 再 x; (2). 先 x 后 z 再 y. (华中理工大学)

练习 7.2.12 求极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_t=\left\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\right\}$. (中国人民大学)

练习 7.2.13 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint_{r\leqslant n}[r]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $[r]$ 是 r 的整数部分 (即不大于 r 的最大整数), n为正整数. [提示: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.] (西安电子科技大学)

练习 7.2.14 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(0)=0$, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.\ (\text{辽宁师范大学})$$

练习 7.2.15 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(px^{2m}+qy^{2n}+rz^{2t})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant R^2$, m, n, l, p, q, r, a, b, c, R 均为已知常数. (北京航空航天大学)

练习 7.2.16 计算三重积分 $\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x^2+y^2-z^2\geqslant\frac{1}{2}}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. (中科院数学所)

练习 7.2.17 设 $a>0, b>0, c>0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{V} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{a+b+c}\cdot\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)},$$

其中 V 为四面体 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x+y+z\leqslant 1$. (郑州大学)

练习 7.2.18 计算由平面 $3x-y-z=\pm 1$, $-x+3y-z=\pm 1$, $-x-y+3z=\pm 1$ 所围成的体积, 将此结果推广到 n 维空间的情况, 它的体积应是多少? (上海交通大学)

练习 7.2.19 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=axyz$ 所围的体积. (中国科学院)

练习 7.2.20 求曲面 $x^2+y^2+z^2=\frac{z}{h}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}$ 所界的体积. (河北师范大学)

练习 7.2.21 求 xz 平面上的圆周 $(x-a)^2+z^2=b^2$ $(0<b<a)$ 绕 z 轴旋转一周所成比曲面所包围的体积. (厦门大学)

练习 7.2.22 底半径为 a, 高为 H 的无盖圆柱容器, 倾斜地支放在桌面上, 其轴线与桌面成 45^o 角, 试就 a, H 的不同情况, 求容器的最大贮水量. (北京大学)

练习 7.2.23 设 $f(x)>0$ 连续, @跟锦数学微信公众号

$$F(t)=\frac{\iiint_V f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iint_D f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},$$

其中 $V=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$, $D=\{(x,y);x^2+y^2\leqslant t^2\}$, 试证: $F(t)\nearrow$ (当 $t>0$ 时).

练习 7.2.24 设 $f(x,y,z)$ 在 $V=\{(x,y,z);0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$ 上有六阶连续偏导数, f 在边界上恒为零, 且 $\left|\frac{\partial^6 f(x,y,z)}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}\right|\leqslant M$ (在 V 上) (M 为常数). 试证 @跟锦数学微信公众号

$$I\equiv\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\leqslant\frac{1}{8}\cdot\frac{M}{6^3}.$$

练习 7.2.25 计算积分 $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant\pi}\ln|\sin(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. (中国科学院)

练习 7.2.26 计算 $\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2}}$, $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. (武汉大学)

练习 7.2.27 求积分 $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{(|x|+|y|)^2\ln(|x|+|y|)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

练习 7.2.28 证明: $\displaystyle\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 并由此求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$ (四川大学)

练习 7.2.29 用二重积分计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$ (南开大学, 辽宁大学)

练习 7.2.30 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_{x_0}^x x\,\mathrm{d}x\int_{x_0}^x x\,\mathrm{d}x\cdots\int_{x_0}^x x\,\mathrm{d}x\int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(2n)!!}\int_{x_0}^x(x^2-y^2)^nf(y)\,\mathrm{d}y.$$

练习 7.2.31 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)\,\mathrm{d}t_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^n.$$

练习 7.2.32 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, @跟锦数学微信公众号

$$f_{k,n}\equiv f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right),\ \delta_n=\frac{b-a}{n}.$$

将 $\prod\limits_{k=1}^n(1+f_{k,n}\delta_n)$ 展开成 δ_n 的 n 次多项式, 证明当 p 取定值, 令 n 趋于无穷, 含有 δ_n^p 的项收敛于 $\displaystyle\int\cdots\int_{a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_p\leqslant b}f(x_1)\cdots f(x_p)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_p=\frac{1}{p!}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p.$

7.3 曲线积分与 Green 公式

练习 7.3.1 计算积分 $\displaystyle\int_{ABC}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中 ABC 为三点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ 连成的折线. (上海交通大学)

练习 7.3.2 设 C 为对称于坐标轴的光滑曲线, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint\limits_C(x^2y+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(xy^2+x\mathrm{e}^y-\cos x)\,\mathrm{d}y=0.\ (\text{河北师范大学})$$

练习 7.3.3 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{L^+}y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$$

其中 $L^+:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x^2+y^2=Rx\end{cases}$ $(R>0,\ z\geqslant 0)$, L^+ 的指向为顺时针方向. (辽宁师范大学)

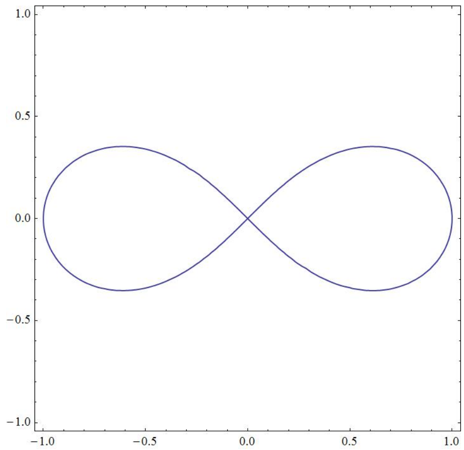
练习 7.3.4 计算曲线积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_C\left(\frac{xy}{ab}+\frac{\sqrt{2}yz}{b\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}zx}{a\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 C 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2z^2}{a^2+b^2}=1\ (x>0,y>0,z>0)$ 与 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的交线 $(a,b>0)$. (四川大学)

练习 7.3.5 计算圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所截部分的面积.

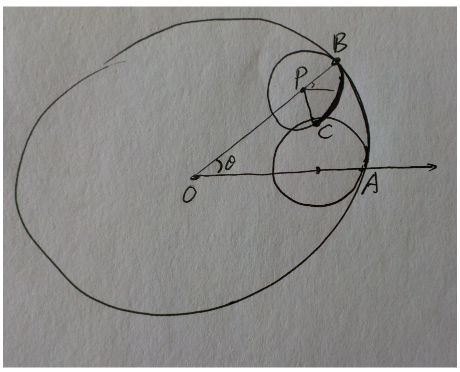
练习 7.3.6 设在力场 $F=(x+2y+4,4x-2y,3x+z)$ 中今有单位质量 M 沿椭圆 $C:\ (3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2=a^2,\ z=4\ (a>0)$ 移动一周 [从 z 轴 $+\infty$ 点看去, 为逆时针方向], 试求力 F 所做的功. (南京航空航天大学)



练习 7.3.7 计算双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围的面积 $(a>0)$.

练习 7.3.8 一个半径为 r 的圆, 沿着半径为 R 的定圆之圆周外滚动 (而不滑动) 时, 由动圆上一点所描绘出的曲线称为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数 $(n\geqslant 1)$, 求外摆线所界的面积.

练习 7.3.9 上题当小圆在大圆内壁滚动 (不滑动), 小圆上一点的轨迹称为内摆线. 设 $\frac{R}{r}=n$ 为正整数 $(n\geqslant 2)$, 求内摆线所围的面积.



练习 7.3.10 求线积分 $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ 在下列两种曲线 C 的情况下的值.

(1). $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; (2). $|x|+|y|=1$ 方向均为逆时针. (北京大学)

练习 7.3.11 求常数 α, 是给定的积分恒为零: (1). $\oint\limits_C \frac{x\,\mathrm{d}x-\alpha y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$, 其中 C 是平面上任一简单闭曲线. (清华大学) (2). $\oint\limits_C \frac{x}{y}r^\alpha\,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}r^\alpha\,\mathrm{d}y = 0$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$, 其中 C 是上半平面任一光滑闭曲线. (北京大学)

练习 7.3.12 计算开口弧段上的曲线积分: (1). $I=\int_{\widehat{AB}}(y^3+x)\,\mathrm{d}x-(x^3+y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $A=(0,0)$, $B(a,0)$, $\widehat{AB}$: $x^2+y^2=ax$. (北京大学).

(2). $K=\int_{C^+}(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{-x^2}\cos y+x^4)\,\mathrm{d}y$, 其中 C^+ 为从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$. (武汉大学)

(3). $L=\int_{\widehat{OA}}(y^2-\sin y)\,\mathrm{d}x+x\sin y\,\mathrm{d}y$, 其中 $\widehat{OA}$ 是从原点 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,0)$ 的弧: $y=\sin x$. (华东师范大学)

练习 7.3.13 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导函数, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,\mathrm{d}y,$$

其中 L 是从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$, $B(1,2)$ 的直线段. (北京航空航天大学)

练习 7.3.14 设 Ω 为 xy 平面上具有光滑边界的有界闭区域, u 在 Ω 内有二阶连续偏导数, 知道边界还有一阶连续偏导数, u 为非常值的函数 $u|_{\partial\Omega}=0$, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_\Omega u\cdot\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<0.\ (\text{武汉大学})$$

练习 7.3.15 证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_{x^2+xy+y^2=R^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$. (西南师院)

练习 7.3.16 证明积分 $\oint\limits_L\cos(l,n)\,\mathrm{d}s=0$, 其中 L 为逐段光滑的封闭曲线, l 为任意给定的方向, n 是 L 的外法线方向.

练习 7.3.17 计算 Gauss 积分 @跟锦数学微信公众号

$$G(x,y)=\oint\limits_L\frac{\cos(r,n)}{r}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 r 的长度, 此向量是连接点 $A(x,y)$ 和封闭光滑曲线 L 上的动点 $M(\xi,\eta)$ 而得的向量, (r,n) 为向量 r 与曲线上 M 点处外法线 n 所成的夹角.

练习 7.3.18 证明: 若 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_D u\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oint\limits_L u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s,$$

式中光滑曲线 L 包围着有界区域 D, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿 L 的外法线的导函数, $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$. (延边大学, 西安电子科技大学) *试由此进而证明: 在 $D\cup L$ 上的调和函数 $u=u(x,y)$ (即: u 在 D 内直到边界 L 上满足 $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$) 单值地被它在边界 L 上的数值所确定. (华中师范大学)

练习 7.3.19 证明平面上的 Green 第二公式 $\iint\limits_D\begin{vmatrix}\Delta u&\Delta v\\u&v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint\limits_L\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n}&\dfrac{\partial v}{\partial n}\\u&v\end{vmatrix}\mathrm{d}$

其中 L 为光滑的封闭曲线, D 是 L 所围的有界区域, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 是沿 L 外法线方向的方向导数. 并由此证明: 若 $u=u(x,y)$ 为调和函数 (即 $\Delta u=0$) 则

(1). $u(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_L\left(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$, 其中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 是 (x,y) 与 L 上动点 (ξ,η) 的距离. $(x,y)\in D$ 为任意内点. (2). $\forall\ (x,y)\in D$, 以 (x,y) 为中心在D 内的圆周 C_r (半径为 r) 有: $u(x,y)=\dfrac{1}{2\pi r}\oint\limits_{C_r}u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s$.

练习 7.3.20 试证: 若 $f(u)$ 为连续函数, 且 C 为逐段光滑的封闭曲线, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0.\ \text{(湖南大学)}$$

练习 7.3.21 试求 $\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$ 的原函数.

练习 7.3.22 设 $f(x),g(y)$ 有连续的偏导数, (1). 若 $yf(xy)\,\mathrm{d}x+xg(xy)\,\mathrm{d}y$ 为恰当微分, 试求 $f-g$; (2). 若 $f(x)$ 有原函数 $\phi(x)$, 试求 $yf(xy)\,\mathrm{d}x+xg(xy)\,\mathrm{d}y$ 的原函数.

7.4 曲面积分 Gauss 公式及 Stokes 公式

练习 7.4.1 计算 $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是 xy 平面上方的抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$. (上海师范大学)

练习 7.4.2 已知椭圆抛物面 $\Sigma_1: z=1+x^2+2y^2$, $\Sigma_2: z=2(x^2+3y^2)$. 计算 Σ_1 被 Σ_2 截下部分的曲面面积. (华东师范大学)

练习 7.4.3 计算 $I=\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$, 其中 $\boldsymbol{a}=\{xy,-x^2,x+z\}$, S 为平面 $2x+2y+z=6$ 包含在第一卦限的部分, $\boldsymbol{n}$ 是 S 的单位法向量. (南京化工学院)

练习 7.4.4 试求曲面积分 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ $(-\infty<t<+\infty)$ 之值, 其中 $f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{若 } z\geqslant\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{若 } z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$. (山东大学)

练习 7.4.5 计算 $I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面$x^2+y^2=2x$ 所割下的部分. (南京化工学院)

练习 7.4.6 设曲面 S 的极坐标方程为: $r=r(\phi,\theta)$ $[(\phi,\theta)\in\Delta]$, $r(\phi,\theta)$ 有连续的偏导数. 试证 S 的面积 $S=\iint\limits_{\Delta}\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2\right]\sin^2\phi+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2}\,r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$. 并由此计算曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ $(a>0)$ 的面积.

练习 7.4.7 (1). 证明: 半轴长分别为 a,b,c 的椭球, 表面积 S 可以表示成 @跟锦数学微信公众号

$$S=\iint\limits_{S_1}\sqrt{b^2c^2\xi^2+c^2a^2\eta^2+a^2b^2\zeta^2}\,\mathrm{d}S,$$

其中积分沿单位球面 $S_1:\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ 的外侧进行. (2). 利用 Cauchy 不等式 $\sum\limits_i a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum\limits_i a_i^2\sum\limits_i b_i^2}$ 证明 $S\geqslant\iint\limits_{S_1}(bc\xi^2+ca\eta^2+ab\zeta^2)\,\mathrm{d}S$, 并证明不等式右端的积分值为 $\frac{4\pi}{3}(bc+ca+ab)$. (3). 已知椭球体积为 $\frac{4\pi}{3}abc$, 求证椭球的表面积不小于同样体积的球的求的表面积.

练习 7.4.8 设 S 是椭球面, ρ 表示从椭球中心到与椭球表面元素 $\mathrm{d}S$ 相切的平面之间的距离, 试计算积分:

(1). $I=\iint\limits_S \rho\,\mathrm{d}S$; (长沙铁道学院) (2). $K=\iint\limits_S \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}S$.

练习 7.4.9 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{S_{外}} x(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $S_{外}$ 是坐标原点为中心的单位球面的外侧. (武汉大学)

练习 7.4.10 计算第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{S}[f(x,y,z)+x]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, S 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限上侧. (湖北大学)

练习 7.4.11 计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧. (南开大学)

练习 7.4.12 计算如下曲面积分: (1). $I=\iint\limits_{S} yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+zx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, 其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内, 三个坐标平面及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 所围立体在第一卦限部分的外侧面. (南京大学) (2). $K=\iint\limits_{\Sigma} y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, 其中 Σ 是 $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$ 和坐标面在第一卦限所围成曲面外侧. (哈尔滨工业大学)

练习 7.4.13 计算如下曲面积分 (1). $I=\iint\limits_{S} z\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\mu y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)\mathrm{d}S$, 其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分 $(z\geqslant 0)$, λ,μ,γ 是 S 的外法线方向余弦. (南京大学)

(2). $K=\iint\limits_{S} x^2yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+xy^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是顶点为 @跟锦数学微信公众号

$$A(0,0,2),B(0,1,0),C(0,1,0),D(-1,0,0),E(0,-1,0)$$

的棱锥面上侧 (即三角形 ABC,ACD,ADE,AEB 的上侧). (中山大学)

(3). @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}L=&\iint\limits_{\Sigma}\left[f(yz)-\frac{xy^2}{2500\pi}\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left[g(zx)-\frac{yz^2}{2500\pi}\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\&+\left[h(xy)-\frac{zx^2}{2500\pi}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 的内侧, f,g,h 是连续可微函数. (华中理工大学)

(4). $M=\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$, 被 $z=0$, $z=3$ 截的部分外侧. (北京航空航天大学).

练习 7.4.14 试计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\cos\alpha\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中光滑有界闭曲面, 关于平面 $x=1$ 对称, 内域体积为 $\dfrac{1}{2}$, α 是 Σ 上外法矢与正 x 轴的夹角. (华中理工大学)

练习 7.4.15 试学习如下两道试题, 写出两道新试题, 并给出解答. (1). 设空间区域 Ω 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成, 其中 a 为正的常数, 记 Ω 表面的外侧为 S, Ω 的体积为 V, 求证: $V=\oiint\limits_{S} x^2yz^2\,\mathrm{d}yr\ \mathrm{d}z-xy^2z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z(1+xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. (2). 设 $H=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6z^2x^2$ 为四次齐次函数, 利用齐次函数特征性质 $x\dfrac{\partial H}{\partial x}+y\dfrac{\partial H}{\partial y}+z\dfrac{\partial H}{\partial z}=4H$, 计算曲面积分 $\oiint\limits_{S} H(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, S 是中心位于原点的单位球. (西安冶金建筑学院)

练习 7.4.16 设 V 为光滑曲面 S 所围的有界区域, u,v 在 $V+S$ 上有直到二阶连续偏导数. 记 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, n 表示 S 外法线方向, 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{V} v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S.$$

并由此证明, 若 u 是 V 内为调和函数 ($\Delta u=0$ 于 V 内), 则 u 被它在边界 S 上的值唯一确定.

练习 7.4.17 证明空间第二 Green 公式: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{V}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{S}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中 V 为曲面 S 所围的区域, n 是曲面 S 的外法线向量, 函数 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ 为 $V+S$ 上可微分两次的函数. 进而证明, 若 $u=u(x,y,z)$ 为 V 内之调和函数, 则:

(1). $u(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[u\dfrac{\cos(r,n)}{r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$(x,y,z)\in V$ 为内点, n 为 S 在 (ξ,η,ζ) 点的外法线单位向量.

(2). $\forall\ (x,y,z)\in V$, 及 V 内以 (x,y,z) 为中心, R 为半径的任意球面 S, 有 $u(x,y,z)=\dfrac{1}{4\pi R^2}\displaystyle\iint_S u(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S$.

练习 7.4.18 设 S 是光滑或分片光滑的封闭曲面, P,Q,R 在 S 包围的区域 V 内 (直到边界) 连续, 有连续的偏导数, 证明 $\displaystyle\iint_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=0$, 其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 S 的法线向量的方向余弦.

练习 7.4.19 试计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oint_{L^+}(z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(y-x)\,\mathrm{d}z,$$

其中 L^+ 是从 $A(a,0,0)$ 经 $B(0,a,0)$ 到 $C(0,0,a)$ 回到 $A(a,0,0)$ 的三角形.

练习 7.4.20 计算积分 $I=\displaystyle\oint_{L^+}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, 其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $z\geqslant 0$ 的部分, 积分方向从原点进入第一卦限. (清华大学)

练习 7.4.21 计算积分 $I=\displaystyle\oint_{L^+}y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 L^+ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, a>0, x+y+z=0$, 从 x 轴 $+\infty$ 处看为逆时针方向.

练习 7.4.22 设 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的逐段光滑的封闭曲线, L 所围的面积为 S, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是平面法线的方向余弦, L^+ 与法线成右手关系. 试计算积分 $I=\displaystyle\oint_{L^+}\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$.

练习 7.4.23 设 L 为空间某封闭光滑曲线, P,Q,R 为空间的具有一阶连续偏导数的函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\oint_{C^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\right|$$
$$\leqslant\max_{(x,y,z)\in S}\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2}\cdot S,$$

其中 S 表示 L 上展布的 (以 L 为边界的) 某曲面, 同时也用它表示曲面的面积.

练习 7.4.24 试证 $\displaystyle\oint_{L^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_L\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\,\mathrm{d}s$, 其中 θ 表示 L^+ 的切线与方向 (P,Q,R) 的夹角.

练习 7.4.25 设 $u=u(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中满足波动方程 $u''_{zz}=u''_{xx}+u''_{yy}$, 试证: (1). 对于 $\mathbb{R}^3$ 中任何逐片光滑的封闭曲面 S, 有 @跟锦数学微信公众号

$$I=\oiint\limits_S -2u'_z u'_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2u'_z u'_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

(2). 若在 xy 平面上恒有 $u\equiv 0$, $u'_z\equiv 0$ 则: 当 $S=S_1$ (xy 平面上任一封闭区域) 时, $I=0$; 当 $S=S_2$ (平行于 xy 平面的任一平面区域, 法线朝上) 时, $I\geqslant 0$; 当 $S=S_3$ (法线与 z 轴正向成 45^o 角的锥面) 时, $I\geqslant 0$. 并由此证明: $\mathbb{R}^3$ 中处处有 $u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z=0$, $u\equiv 0$. (3). 若 f,g 在 $\mathbb{R}^3$ 中有连续的二阶偏导数, 满足上述不懂方程, 在 xy 平面上 $f=g$, $f'_z=g'_z$, 则在 $\mathbb{R}^3$ 中 $f\equiv g$ (波动方程的解唯一).

7.5 场论

练习 7.5.1 试证本节场论公式 10), 14), 19), 20), 21), 23).

练习 7.5.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是常向量试求 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla\left(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$.

练习 7.5.3 设 $\nabla\cdot(f(r)\boldsymbol{r})=0$, 求 $f(r)$.

练习 7.5.4 设 $\boldsymbol{B}=-\nabla\phi$, $\boldsymbol{C}$ 为常向量, $\Delta\phi=0$, 试证: (1). $\nabla\cdot[\phi\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{B}]=0$; (2). $\nabla\cdot[\phi\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{C}]=\boldsymbol{C}^2-\boldsymbol{B}^2$; (3). $\nabla\times[\phi\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{B}]=2\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}$; (4). $\nabla\times[\phi\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{C}]=0$.

练习 7.5.5 u 在 $\mathrm{grad}\,v$ 的方向导数, 何时为零?

练习 7.5.6 求 $|\mathrm{grad}\,u|=1$ 的轨迹, 设 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

练习 7.5.7 设 P,Q,R 是 (x,y,z) 有连续偏导数的函数, $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$. 试用两种方法, 将 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=0$ 写成柱面坐标的形式.

练习 7.5.8 设 S 是以曲线 L 为边界的光滑曲面, $\boldsymbol{n}$ 为 S^+ 的法线单位向量, $\boldsymbol{n}$ 与 L^+ 成右手系, u,v 为二有连续偏导数的函数. 试证: @跟锦数学微信公众号

$$\oint\limits_{L^+} u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_S(\mathrm{grad}\,u\times\mathrm{grad}\,v)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

练习 7.5.9 证明: $\boldsymbol{A}=(x^2-yz)\boldsymbol{i}+(y^2-zx)\boldsymbol{j}+(z^2-xy)\boldsymbol{k}$ 是有势场, 并求其势.

练习 7.5.10 设 $\boldsymbol{F}=\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}-\dfrac{x-y+b}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是有势场, 求 a,b 与 $\boldsymbol{F}$ 的势.

练习 7.5.11 证明: 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是无旋场, 则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是管量场.

练习 7.5.12 设 V 是以光滑曲面 S 为边界的有界闭区域, $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 S 的外法线, $P=(\xi,\eta,\zeta)\in V$, $Q=(x,y,z)$ 为积分的动点. r 为 P 与 Q 的距离: @跟锦数

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

试证: $\operatorname{grad}_P\left\{\iiint\limits_V \rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r}\right\}=-\iint\limits_S \rho(Q)n\frac{\mathrm{d}S}{r}+\iiint\limits_V \operatorname{grad}_Q\rho(Q)\frac{\mathrm{d}V}{r}$, 其中 $\rho(Q)=\rho(x,y,z)$ 为具有连续偏导数的函数.

第九章 谢惠民恽自求易法槐钱定边数学分析习题课讲义所有题目汇总

如需纸质版，请加张祖锦微信：zhangzujin361，上册 100 元，下册 120 元. 如今还有裴/谢上/谢下三本纸质资料. 一次性同一收货地址 @跟锦数学微信公众号

购买 1 本，无优惠；

购买 2 本，每本优惠 5 元；

购买 3 本，每本优惠 10 元；

购买 6 本，每本优惠 20 元；

购买 10 本及以上，每本优惠 30 元.

Contents

第01章引论

1.3.2练习题

1. 关于 Bernoulli 不等式的推广: (1) 证明: 当 $-2 \leqslant h \leqslant -1$ 时, Bernoulli 不等式 $(1+h)^n \geqslant 1+hn$ 仍成立; (2) 证明: 当 $h \geqslant 0$ 时成立不等式 $(1+h)^n \geqslant \frac{n(n-1)h^2}{2}$, 并推广之; (3) 证明: 若 $a_i > -1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且同号, 则成立不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

2. 阶乘 $n!$ 在数学分析以及其他课程中经常出现, 以下是几个有关的不等式, 它们都可以从平均值不等式得到: (1) 证明: 当 $n>1$ 时成立 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; (2) 利用 $(n!)^2=(n\cdot 1)[(n-1)\cdot 2]\cdots(1\cdot n)$ 证明: 当 $n>1$ 时成立 @跟锦数学微信公众号

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n;$$

(3) 比较 (1) 和 (2) 中两个不等式的优劣, 并说明原因; (4) 证明: 对任意实数 r 成立 $\left(\sum_{k=1}^{n} k^r\right)^n \geqslant n^n (n!)^r$.

3. 证明几何平均值-调和平均值不等式: 若 $a_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$, 则有 @跟锦数学微信公众号

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}.$$

4. 证明: 当 a,b,c 为非负数时成立 $\sqrt[3]{abc} \leqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$. (这个结果还可以推广到 n 个非负数的情况.)

5. 证明以下几个不等式: (1) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$ 和 $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$;

(2) $|a_1|-\sum_{k=2}^{n}|a_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|$; 又左边可否为 $\left||a_1|-\sum_{k=2}^{n}|a_k|\right|$?

(3) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$;

(4) $|(a+b)^n-a^n| \leqslant (|a|+|b|)^n-|a|^n$.

6. 试按下列提示, 给出 Cauchy 不等式的几个不同证明: (1) 用数学归纳法;

(2) 用 Lagrange 恒等式 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (|a_k||b_i| - |a_i||b_k|)^2;$$

(3) 用不等式 $|AB| \leqslant \dfrac{A^2+B^2}{2}$; (4) 构造复的辅助数列 $c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2i|a_k b_k|$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 再利用 $\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|$.

7. 用向前-向后数学归纳法证明: 设 $0 < x_i \leqslant \dfrac{1}{2}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right]^n}.$$

8. 设 a, c, g, t 均为非负数, $a + c + g + t = 1$, 证明 $a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geqslant 1/4$, 且等号成立的充要条件是 $a = c = g = t = 1/4$.

1.4练习题

以正面方式给出下列命题或叙述的否定 (有几题可在学了有关概念后再做). (1) 数集 A 有上界;

(2) 数集 A 的最小值为 b;

(3) f 是区间 (a, b) 上的单调增加函数;

(4) f 是区间 (a, b) 上的单调函数;

(5) $A \subset B$;

(6) $A \setminus B \neq \varnothing$;

(7) $\{x_n\}$ 是无穷小量;

(8) $\{x_n\}$ 是正无穷大量.

第02章数列极限

2.1.2思考题

1. 数列收敛有许多等价定义. 例如:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}_+$, $\forall\ n \geqslant N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow \forall\ m \in \mathbb{N}_+,\ \exists\ N \in \mathbb{N}_+,\ \forall\ n > N$, 成立 $|a_n - a| < 1/m$;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}_+,\ \forall\ n \geqslant N$, 成立 $|a_n - a| < K\varepsilon$, 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数.

试证明以上定义与上一节列出的定义的等价性.

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?

3. 判断正确与否: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

6. 一个很小很小的量, 例如取 1 米为单位长度时几个纳米大小的量, 是否是无穷小量? 如何刻画一个无穷小量的大小?

7. 问: 正无穷大量是否一定单调增加? 无界数列是否一定是无穷大量?

8. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?

9. 判断正确与否: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是正数.

2.1.5练习题

1. 按极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4} = 3$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = 1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0\ (a > 0)$.

2. 设 $a_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. 反之如何?

4. 下面一组题在本章中的许多极限计算中有用:

(1) 设 $p(x)$ 是 x 的多项式. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(a)$.

(2) 设 $b > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^a$.

(3) 设 $b > 0, b \neq 1$, $\{a_n\}$ 为正数列, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \log_b a_n = \log_b a$.

(4) 设 b 为实数, $\{a_n\}$ 为正数列, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n^b = a^b$.

(5) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \sin a$.

5. 设 $a > 1$, 证明: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

2.2.1思考题

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散, 问: 数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

2. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散, 问: 数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

3. 设 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 已知 $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$, 问: 数列 $\{b_n\}$ 是否收敛?

4. 找出下列运算中的错误: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

5. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又对每个 n 有 $b < a_n < c$, 问: 是否成立 $b < a < c$?

6. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又有 $b \leqslant a \leqslant c$, 问: 是否存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leqslant a_n \leqslant c$?

7. 设已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 问: 是否有 $\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$? 又问: 反之如何?

2.2.4练习题

1. 证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限.

2. 以下是可以应用夹逼定理的几个题.

(1) 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, 求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^p}$.

(2) 设 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$, $n \in \mathbb{N}_+$. 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(3) 设 $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a>0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x|<1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}$.

4. 设 $s_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n$, $\quad|a|<1$. 求 $\{s_n\}$ 的极限.

5. 设正数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限大于 0. 证明: 这个数列有正下界, 但在数列中不一定有最小数.

6. 证明: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中一定有最小数.

7. 证明: 无界数列至少有一个子列是确定符号的无穷大量.

8. 证明数列 $\{\tan n\}$ 发散.

9. 设数列 $\{S_n\}$ 的定义为

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p},\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

证明 $\{S_n\}$ 在以下两种情况均发散: (1) $p\leqslant0$; (2) $0<p<1$.

2.3.2练习题

1. 证明: 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{|x_n|\}$ 至少从某项开始后单调. 又问: 反之如何?

2. 设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相同.

3. 按照极限的定义证明: 单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项, 单调减少有下界的数列的极限不大于数列的任何一项.

4. 设 $x_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{n+1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求数列 x_n 的极限.

5. 设 $a_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

6. 在例子 2.2.6 的基础上证明: 当 $p>1$ 时数列 $\{S_n\}$ 收敛, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p},\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

7. 设 $0<x_0<\frac{\pi}{2}$, $x_n=\sin x_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

8. 设 $a_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0.

9. 设 $a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

10. 下列数列中, 哪些是单调的:

(1) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}$;

(2) $\{\sin n\}$;

(3) $\left\{\sqrt[n]{n!}\right\}$.

11. 证明: 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列.

12. 对每个自然数 n, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 中的根. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.4.1思考题

思考题若在这三个命题的条件中将极限值 l 改为不带符号的无穷大量 ∞, 则结论均不成立. 请读者举出反例.

2.4.3练习题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

2. 设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 a.

3. 设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 a, $\{a_{2k}\}$ 收敛于 b, 且 $a\neq b$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1}=d$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.

5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且收敛于 A, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A$.

6. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$.

8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0<a_1<1$ 和 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$ $(n\geqslant 1)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\alpha\beta$.

2.5.5练习题

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

2. 设 $k\in\mathbb{N}_+$, 证明: $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$.

3. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

4. 设 $\{p_n\}$ 为正数列, 且 $p_n\to+\infty$. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$.

5. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$.

6. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

7. 证明: $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

8. 设 $S_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: 对 $n\geqslant 2$ 成立不等式 @跟锦数学微信公众号

$$n^n\left[1+\frac{1}{4(n-1)}\right]\leqslant S_n<n^n\left[1+\frac{2}{e(n-1)}\right].$$

9. 设有 $a_1=1$, $a_n=n(a_{n-1}+1)$, $n=2,3,\cdots$, 又设 $x_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 求数列 x_n 的极限.

2.6.3练习题

1. (1) 设 $a>0$, $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$;

   (2) 设 $a>0$, $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

2. 设 $A>0, 0<b_0<A^{-1}$, $b_{n+1}=b_n(2-Ab_n)$, $b\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\lim_{n\to\infty}b_n=A^{-1}$.

3. 设参数 $b>4$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=bx_n(1-x_n)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 求证: $\{x_n\}$ 发散.

4. 设 $x_1=1, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n^2+1)$. 问: b 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

5. 设 $x_0=a, x_n=1+bx_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 试求出使该数列收敛的 a,b 的所有值.

6. (对于线性迭代的全面讨论) 设给定初始值 x_1, 然后用线性函数 $f(x)=ax+b$ 生成迭代数列 $\{x_n\}$, 即 $x_{n+1}=ax_n+b$. 试回答以下问题:

   (1) 是否存在线性函数, 使对于任何初始值 x_1, $\{x_n\}$ 总是收敛的?

   (2) 是否存在线性函数, 使对于任何初始值 x_1, $\{x_n\}$ 总是发散的?

(3) 是否存在线性函数, 使对于不同的初始值 x_1, $\{x_n\}$ 收敛到不同极限?

(4) 是否存在线性函数, 使对于某些初始值 x_1, $\{x_n\}$ 收敛, 而对于其他初始值 x_1, $\{x_n\}$ 发散?

7. 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且满足 $x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2,\ n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

8. 设 $A>0, x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right),\ n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$.

9. 设 $A>0, x_1>0,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3A)}{3x_n^2+A},\ n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{A}$.

2.7.3第1组参考题

1. 设 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

2. 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n\leqslant a_{n+2}$, $a_n\leqslant a_{n+3}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

3. 设 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n+a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0. 又存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=a$. 证明: $|a|\leqslant 1$.

5. 设 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right),\ n\in\mathbb{N}_+$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

6. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

7. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right)$.

8. 证明: 当 $0<k<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^k-n^k]=0$.

9. (1) 设 $\{x_n\}$ 收敛, 令 $y_n=n(x_n-x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}_+$, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛?

(2) 在上一小题中, 若 $\{y_n\}$ 收敛, 证明: $\{y_n\}$ 收敛于 0.

10. (1) 设正数列 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$. 证明: $\{a_n\}$ 是正无穷大量.

(2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$. 证明: $\{a_n\}$ 无界.

11. 证明: $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n<n!<\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 其中右边的不等式当 $n\geqslant 6$ 时成立.

12. 证明: $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

13. (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1) $n \geqslant 2$ 时成立 $1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}=3-\frac{1}{2!1\cdot 2}-\cdots-\frac{1}{n!(n-1)n}$;

(2) $e=3-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}$;

(3) 用 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}$ 计算 e 要比不加上最后一项好得多.

14. 设 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

15. 设已知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

16. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$.

17. 设对每个 n 有 $x_n<1$ 和 $(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\frac{1}{4}$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限.

18. 设 $a_1=b, a_2=c$, 在 $n\geqslant 3$ 时, 由 $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 定义. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

19. 设 a,b,c 是三个给定的实数. 令 $a_1=a, b_1=b, c_1=c$, 并以递推公式定义 @跟锦数学微信公众号

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\quad c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

求这三个数列的极限.

20. (1) 设 $a_1>b_1>0$, $a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

(2) 在 $a_1=2\sqrt{3}$, $b_1=3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半轴长 π. (这里可以利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$.)

(注意本题与例题 2.3.5 完全不同. 实际上这就是计算圆周率的 Archimedes- 刘徽方法的迭代形式. 在 (2) 中的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 就是单位圆的外切和内接正多边形的半周长 (请求出边数与 n 的关系).)

2.7.3第2组参考题

1. 设 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ (n 重根号), $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

2. 证明: 对每个自然数 n 成立不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{e}{2n}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$.

4. 设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 用 K_n 表示使 $S_k\geqslant n$ 的最小下标. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n}$.

5. 设 $x_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\binom{n}{k}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设二项式系数 $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n}$ 的算术平均值和集合平均值分别记为 A_n 和 G_n. 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{e}$.

7. 设 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $n\in\mathbb{N}_+$, 数列 $\{A_n\}$ 收敛. 又有一个单调增加的正数数列 $\{p_n\}$, 且为正无穷大量. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

8. 设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$.

9. 设数列 $\{u_n\}_{n\geqslant0}$ 对每个非负整数 n 满足条件 $u_n=\lim\limits_{m\to\infty}(u_{n+1}^2+u_{n+2}^2+\cdots+u_{n+m}^2)$. 证明: 若存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n),$$

则只能是每个 $u_n=0$.

10. (Toeplitz 定理) 设对 $n,k\in\mathbb{N}_+$ 有 $t_{nk}\geqslant0$. 又有 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 定义 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. (几种变形: (1) 将

条件 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 改为 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$; (2) 不要求 t_{nk} 非负, 将 (1) 中的条件改为存在 $M>0$, 使得对每个 n, 成立不等式 $|t_{n1}|+\cdots+|t_{nn}|\leqslant M$. 则结对对 $a=0$ 仍成立.)

11. 用 Toeplitz 定理导出 Stolz 定理.

12. 设 $0<\lambda<1$, $\{a_n\}$ 收敛于 a. 证明: $\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\dfrac{a}{1-\lambda}$.

13. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 并且存在常数 K, 使得 $|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant K$ 对每个 n 成立. 令 $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明: $\lim_{n\to\infty}z_n=0$. (从本题的条件已可推出 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$. 但是可以举出例子说明仅仅有条件 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$ 不能得到 $\lim_{n\to\infty}(x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1)=0$.)

14. 设 $y_n=x_n+2x_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛.

15. 由初始值 a_0 和 $a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 确定数列 $\{a_n\}$. 求 a_0 的所有可能值, 使得数列 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的.

16. 证明数列 $\sqrt{7}$, $\sqrt{7-\sqrt{7}}$, $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}$, $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}$, $\cdots$ 收敛, 并求其极限.

17. 令 $y_0\geqslant 2$, $y_n=y_{n-1}^2-2$, $n\in\mathbb{N}_+$. 设 $S_n=\dfrac{1}{y_0}+\dfrac{1}{y_0y_1}+\cdots+\dfrac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$. 证明: $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$.

18. 设 $x_1=c$, $x_{n+1}=a^{x_n}$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 根据下面提供的函数 $f(x)=a^x$ 和 $f(f(x))$ 的单调性和不动点的知识, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性.

(1) 在 $a>1$ 时函数 $f(x)=a^x$ 单调增加.

(i) 如 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 无不动点. 证明: 不论 c 如何, 数列 $\{x_n\}$ 总是单调增加的正无穷大量.

(ii) 在 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时 f 恰有一个不动点. 证明: 当 $c\leqslant\mathrm{e}$ 时数列 $\{x_n\}$ 单调增加收敛于 e, 而当 $c<\mathrm{e}$ 时, $\{x_n\}$ 是单调增加的正无穷大量.

(iii) 如 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 有两个不动点, 根据 $x_1=c$ 的大小, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性.

(2) 在 $0<a<1$ 时函数 $f(x)=a^x$ 单调减少, 存在唯一不动点.

(i) 如 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leqslant a<1$, 则复合函数 $f(f(x))=a^{a^x}$ 只有一个不动点. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 它的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 是具有不同单调性的单调数列.

(ii) 如 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$, 则复合函数 $f(f(x))=a^{a^x}$ 有三个不动点. 证明: 除非 $x_1=c$ 恰好是 f 的不动点, 否则子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调收敛于不同的极限, 数列 $\{x_n\}$ 发散.

(这是关于迭代生成数列的一道名题, 从 Euler 开始就有许多人对它作过研究 (不限于在实数范围内), 在美国数学月刊 87 卷 (1981) 235-252 页有详细介绍, 并附有丰富的文献. 但是从混沌学的角度来看, 至少在实数范围内进行讨论时, 问题在本质上是简单的, 只不过依赖于对函数 $f(x)=a^x$ 和 $f(f(x))=a^{a^x}$ 的单调性和不动点个数的讨论. 这些问题在学了微分学后就不难解决 (见 8.8.2 小节的第二组参考题 17,18). 此外, 对本题的讨论也可以和计算机实验相配合, 其中出现一次倍周期分岔.)

19. 设参数 $b>0$, $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_{n+1}=bx_n(1-x_n)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明以下结论 (对于情况 $b>4$ 的讨论即是 2.6.3 小节中的题 3):

(1) 当 $0<b\leqslant 1$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少收敛于 0;

(2) 当 $1<b\leqslant 2$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少收敛于 $1-\dfrac{1}{b}$;

(3) 当 $2<b\leqslant 3$ 时, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性, 并收敛于同一极限 $1-\dfrac{1}{b}$;

(4) 当 $3<b\leqslant 1+\sqrt{5}$ 时, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性, 但收敛于不同极限.

(这就是 20 世纪 70 年代中期以来在混沌学中研究得最多的范例之一. 映射 $f(x)=bx(1-x)$ 的名称由 Logistic 映射, 抛物映射等). 用这个映射通过迭代可以得到非常丰富而复杂的结果 (例如见 [39,21,38]), 对其中的许多问题的研究一直延续到现在. 虽然关于它的全面介绍在本书中是不可能的, 但以上四个小题就是进入混沌的前奏曲, 它们完全是初等的. 例如, 用动力系统的术语来说, 前三种情况中从 $x_1=0.5$ 出发的轨道 (即数列 $\{x_n\}$) 收敛到不动点上. 而最后一种情况就是说从 $x_1=0.5$ 出发的轨道收敛到一个周期为 2 的轨道. 特别当 $b=1+\sqrt{5}$ 时, 有 $x_{2k-1}=\dfrac{1}{2}$, $x_{2k}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, $k\in\mathbb{N}_+$, 也就是说这条轨道本身就是一个周期 2 轨道.

20. 给定 $x_1,\cdots,x_n$, 令 $x_i^{(1)}=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}, i=1,\cdots,n$, 其中 $x_{n+1}=x_1$. 归纳定义 @跟锦数学微信公众号

$$x_i^{(k)}=\frac{x_i^{(k-1)}+x_{i+1}^{(k-1)}}{2},\ i=1,\cdots,n,$$

其中 $x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$, $k=2,3,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. (本题较难, 可先讨论 $n=2,3,4$ 等简单情况.已知有多种解法, 甚至还可以用多元函数或线性代数为工具的解法.)

2.8第1次习题课

一. 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义

例题 1.1 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

例题 1.2 设 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, $b>1$. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b x_n=\log_b a$.

二. 收敛数列的性质 (I)

例题 2.1 利用收敛数列的性质求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}$ (n 重根号).

三. 课堂练习题

1. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ (注意分情况 $a\neq0$, $a=0$).

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^c}{a^n}=0$, 其中 $c=0$, $a>1$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 又已知用 $\varepsilon-N$ 语言描述这个极限时, 可取 N 与 ε 无关, 问这样的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是常值数列? 如果不是, 又具有怎样的特性?

4. (1) 正面叙述 $\{x_n\}$ 不是无穷小量 (用对偶法则).

(2) 证明叙述 "$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N$, $\forall\ n,m\geqslant N$ 有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$" 的否命题.

5. 证明: 给定实数 a 的任一邻域 $O_\delta(a)$ 中必定同时存在有理数与无理数.

四. 命题的证明与讨论

例题 4.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, 证明存在 N, 使 $n\geqslant N$ 时, $x_n>0$.

例题 4.2 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 问是否有 $a>0$? (强调: 若肯定一个结论, 则要给出证明. 而否定一个结论则只需举出一个反例. 证明要做到: 说话有依据, 推理有逻辑性, 表述要清晰、简洁.)

例题 4.3 设 A 和 B 是两个非空数集, $A\cup B=\mathbb{R}$, 又 A 的每一个元素都小于 B 的每一个元素, 证明 $\sup A=\inf B$ (布置前需作简单讲解)

2.8第2次习题课

一. 习题讲评

1. 设 $x_n > 0, a > 0, a \neq 1$, 证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \Leftrightarrow \log_a x_n = 0$. (先抄一个错误的证法在黑板上, 在逐点纠正, 以此训练徐盛的表达能力, 特别是要分析证明叙述中的逻辑关系.)

2. 设 A, B 为非空的有界集, $C = \{x + y; x \in A, y \in B\}$, 证明: $\sup C = \sup A + \sup B$.

二. 若干基本概念数学分析学习必须建立在清晰的概念基础上, 仅对技巧感兴趣是学不好数学分析的.

三. 收敛数列的性质 (II)

四. Cauchy 命题与 Stolz 定理

五. 例题

1. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$, 则有 $\lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$.

2. 设 $a_k > 0, k = 1, 2, \cdots, m$. 证明 (用夹逼定理): @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

3. (1) 设 $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$, 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (2) 设 $\{F_n\}$ 为 Fibonacci 数列, 即 $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdots \frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$.

5. 设 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 且有 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$.

6. 设 $0 < \lambda < 1$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}.$$

六. 课堂练习题

1. 求 $\lim_{n\to\infty}(\lambda + 2\lambda^2 + \cdots + n\lambda^n)$, 其中 $|\lambda| < 1$.

2. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

3. 设 $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = b$. 证明: $\lim_{n\to\infty} b_n^{\frac{1}{n}} = b$.

4. 证明对应于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 时的 Cauchy 命题.

2.8第3次习题课

一. 习题讲评

二. 例题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta$, 证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=\alpha\beta$.

2. 设 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}$, $x_n=\sin x_{n-1}$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

5. 设 A,B 是两个非空且互不相交的数集, 若 $A\cup B=[0,1]$, 则必存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $\forall\ \delta>0$, 于 $O_\delta(\xi)$ 中既有 A 的点又有集 B 的点.

三. 课堂练习题

1. 设 $0<x_0<1$, $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 求极限: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

3. 证明: $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n-1}\}$ 收敛到同一极限.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right)$.

2.8第4次习题课

一. 子列

二. 本章小节

三. 单元测验 (约一小时)

1. 设 A 和 B 是上有界集, 定义 $A+B=\{x+y;x\in A,y\in B\}$. 证明 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a>0$. 证明: 存在 N, 使当 $n\geqslant N$ 时, $x_n>0$. 并举例说明逆命题不成立.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

4. 叙述并证明 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式的 Stolz 定理.

5. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ (n 重根号) 的存在性.

第03章实数系的基本定理

3.1.3练习题

1. 试证明确界的唯一性.

2. 设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leqslant a$ 中那个是对的?

3. 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. 证明: $\beta = \sup A$.

4. 求下列数集的上确界和下确界: (1) $\{x \in \mathbb{Q}; x > 0\}$; (2) $\left\{y; y = x^2; x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$; (3) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n; n \in \mathbb{N}_+\right\}$; (4) $\left\{n\mathrm{e}^{-n}; n \in \mathbb{N}_+\right\}$; (5) $\{\arctan x;\ x \in (-\infty, +\infty)\}$; (6) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}; n \in \mathbb{N}_+\right\}$; (7) $\left\{1 + n\sin\frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}_+\right\}$.

5. 证明: (1) $\sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$;

   (2) $\inf\{x_n + y_n\} \geqslant \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}$.

6. 设有两个数集 A 和 B, 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leqslant y$. 证明: $\sup A \leqslant \inf B$.

7. 设数集 A 有上界, 数集 $B = \{x + c; x \in A\}$, 其中 c 是一个常数. 证明: $\sup B = \sup A + c, \inf B = \inf A + c$.

8. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{x + y; x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \leqslant \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子.

9. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{x + y; x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \geqslant \sup A + \sup B$. 举出成立严格不等号的例子. (合并以上两题可见: 当且仅当 $C = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ 时成立 $\sup C = \sup A + \sup B$.)

3.2.3练习题

1. 如果数列是 $\{(-1)^n\}$, 开始的区间是 $[-1, 1]$. 试用例题 3.2.2 中的方法具体找出一个闭区间套和相应的收敛子列. 又问: 你能否用这样的方法在这个例子中找出 3 个收敛子列?

2. 如闭区间套定理中的闭区间套改为开区间套 $\{(a_n,b_n)\}$, 其他条件不变, 则可以举出例子说明结论不成立.

3. 如 $\{(a_n,b_n)\}$ 为开区间套, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加, 数列 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 又满足条件 $a_n<b_n$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\neq\varnothing$.

4. 用闭区间套定理证明确界存在定理.

5. 用闭区间套定理证明单调有界数列的收敛定理.

3.3.3练习题

1. 对于给定的数列 $\{x_n\}$ 和数 a, 证明: 在 a 的每个邻域中有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项的充分必要条件是, a 是数列 $\{x_n\}$ 的某个子列的极限.

2. 证明: 有界数列发散的充分必要条件是存在两个收敛到不同极限值的子列.

3. 证明: 若 $\{x_n\}$ 无界, 但不是无穷大量, 则存在两个子列, 其中一个子列收敛, 另一个子列是无穷大量.

4. 用凝聚定理证明单调有界数列的收敛定理.

3.4.5练习题

1. 满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列? 若回答 “是”, 请作出证明; 若回答 “不一定是”, 请举出反例: (1) 对每个 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 成立 $|x_n-x_N|<\varepsilon$; (2) 对所有 $n,p\in\mathbb{N}_+$, 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant p/n$; (3) 对所有 $n,p\in\mathbb{N}_+$, 成立不等式 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant p/n^2$; (4) 对每个自然数 p 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n+p})=0$.

2. 用对偶法则于数列收敛的 Cauchy 收敛准则, 以正面方式写出数列发散的充分必要条件.

3. 证明以下数列为基本数列, 因此都是收敛数列. (1) $a_n=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_+$; (2) $b_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}_+$;
(3) $c_n=\dfrac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\dfrac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}$, $n\in\mathbb{N}_+$.

4. 设 $a_n=\sin 1+\frac{\sin 2}{2!}+\cdots+\frac{\sin n}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明: (1) 数列 $\{a_n\}$ 有界, 但不单调; (2) $\{a_n\}$ 收敛.

5. 设从某个数列 $\{a_n\}$ 定义 $x_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$, $n\in\mathbb{N}_+$, 若数列 $\{y_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛.

6. 设 $S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 其中 $p\leqslant 1$, 证明 $\{S_n\}$ 发散.

7. 天文学中的 Kepler 方程 $x-q\sin x=a$ $(0<q<1)$ 是一个超越方程, 没有求根公式 (见 [15] 的 22 和 72 页). 求近似解的一个方法是通过迭代. 确定 x_1, 然后用递推公式 $x_{n+1}=q\sin x_n+a$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明这个方法的正确性. (这个方程是 Kepler 在 1609 年左右研究行星运动规律时得到的方程. 从天体力学的角度来分析可以肯定对每个给定的 a, 方程存在唯一解. 这个解没有可用的显式表达式, 但可以用近似方法求解. 本题就是用迭代生成数列的方法求近似解. 在 [14] 的 425 小节有解得无穷级数表达式.)

3.5.3练习题

1. 对开区间 $(0,1)$ 构造一个开覆盖, 使得它的每一个有限子集都不能覆盖 $(0,1)$.

2. 用闭区间套定理证明覆盖定理.

3. 用覆盖定理证明闭区间套定理.

4. 用覆盖定理证明凝聚定理.

5. 试对于例题 3.5.2 的证明举出两个具体例子, 即 (1) 数集 A 无上界; (2) A 有上界, 且有 $b<\xi=\sup A$ 和 $\xi\notin A$.

3.6.4练习题

1. 求以下数列的上极限和下极限: (1) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, $n\in\mathbb{N}_+$; (2) $x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$, $n\in\mathbb{N}_+$; (3) $x_n=n^{(-1)^n}$, $n\in\mathbb{N}_+$; (4) $x_n=\mathrm{e}^{n(-1)^n}$, $n\in\mathbb{N}_+$.

2. 若 $x_n\geqslant y_n$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明: $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n$.

3. 对 $\{x_n\}$, 记 $S_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, 证明: $\varliminf\limits_{x\to\infty}x_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}S_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}S_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$. (可以看出本题的结论蕴含了在 §2.4 节中的 Cauchy 命题.)

4. 设 $\{a_n\}$ 为正数列. 证明: $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant 1$ 的充分必要条件是对大于 1 的每个数 l 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{l^n}=0$.

5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列. 证明: $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

6. 利用极限点的定义直接证明: 每个数列的极限点集中必有最大数和最小数.

7. 证明在例题 3.6.2 中所用到的关于上、下极限的公式.

8. 证明公式 (3.2).

9. 对上极限写出与命题 3.6.3 对应的结论, 并作出证明.

10. 证明公式 (3.5).

11. 证明命题 3.6.5.

3.7.3第1组参考题

1. 证明: 数列有界的充分必要条件是它的每个子列都收收敛子列.

2. 证明: 数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a, 使数列的每个子列有收敛于 a 的子列.

3. 证明: 在有界闭区间上的无界函数一定在这个区间的某一点的每一个邻域中无界. 又问: 在开区间上的无界函数是否有于此类似的性质?

4. 设函数 f 在区间 (a,b) 上定义, 对区间 (a,b) 的每一个点 ξ, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap(a,b)$ 时, 如 $x<\xi$, 则 $f(x)<f(\xi)$, 如 $x>\xi$, 则 $f(x)>f(\xi)$. 证明: 函数 f 在 (a,b) 上严格单调增加.

5. 试用上下极限的工具证明第二章 2.4.1 中的 Stolz 定理. (参考 3.6.4 小节的题 3.)

6. 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是正数列. 在以下乘积均有意义时证明:

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n\varliminf_{n\to\infty}y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n\varlimsup_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

7. 设 $\{x_n\}$ 为正数列. 用上下极限证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

8. 若对于数列 $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}}{k}=a,$$

证明: $\lim\limits_{k\to\infty}a_n=a$.

9. 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1$.

10. 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}$.

3.7.3第2组参考题

1. 证明: 对于 $\mathbb{R}$ 中的任何两个正数 a,b, 如有 $0<a<b$, 则存在一个自然数 n, 使得 $na>b$. (这个结论称为 Archimedes 公理或原理).

2. 设有两个非空实数集 A 和 B, 满足条件: (1) $\mathbb{R}=A\cup B$; (2) 在 A 中的每一个数都小于 B 中的每一个数. 证明: 或者 A 有最大数而 B 无最小数, 或者 B 有最小数而 A 没有最大数. (这就是 Dedekind 的连续性定理或公理, 它与实数系的每一个基本定理等价.)

3. 证明: 将实数 $\mathbb{R}$ 分成两个非空集合 A 和 B, 则或者 A 中有数列收敛于 B 中的点, 或者 B 中有数列收敛于 A 中的点. (这个结论称为实数的连通性, 它与实数系的每一个基本定理等价.)

4. 试用压缩映射原理证明数列 @跟锦数学微信公众号

$$\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\cdots$$

收敛, 并计算其极限. (即用压缩映射原理重做第二章的第二组参考题 16.)

5. 若对每个数列 $\{y_n\}$, 成立 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

6. (1) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=0$. 证明: 存在无限多个 n, 使得 $x_n<x_k$, $k=1,2,\cdots,n-1$.

(2) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且有正下界. 证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$.

7. 设 $y_n = px_n + qx_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 其中 $|p| < |q|$. 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛.

8. 设 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n} + 2x_n) = A$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

9. 设 $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限点集合为 $[-1, 1]$.

10. 设 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. 将 $\{x_n\}$ 的下极限和上极限分别记为 l 和 L. 证明: 在区间 $[l, L]$ 中的每一个点都是数列 $\{x_n\}$ 的极限点. (众所周知, 本题的条件与基本数列的条件差得很远, 一般来说当然不能保证数列 $\{x_n\}$ 收敛. 但是 1976 年有人发现, 如果 $\{x_n\}$ 是迭代生成数列, 则从 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 差不多就可以推出 $\{x_n\}$ 收敛, 从而 $l = L$. 确切内容请看第五章第二组参考题的题 20. 见)

第04章函数极限

4.1.3思考题

1. 以下几种叙述中能否作为函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的定义?

(1) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in O_\delta(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| \leqslant \varepsilon$;

(2) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in O_\delta(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < k\varepsilon$ (k 为常数);

(3) $\forall\ n \in \mathbb{N}_+,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in O_\delta(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < 1/n$;

(4) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n,\ \forall\ x \in O_{\frac{1}{n}}(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. 以下几种叙述能否作为函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的定义?

(1) $\exists\ \delta > 0,\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ x \in O_\delta(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

(2) $\forall\ \delta > 0,\ \exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ x \in O_\delta(a) - \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

(3) 当 x 充分靠近 a 时, $f(x)$ 越来越接近 A.

3. 用对偶法则给出: (1) $f(x)$ 在点 a 不收敛于 A 的正面叙述; (2) $f(x)$ 在点 a 处没有极限的正面叙述.

4. 怎样用正面方式叙述以下否定概念: (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq A$; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq A$; (3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \infty$; (4) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq A$; (5) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq +\infty$.

4.1.4思考题

思考题对多项式 $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 证明 $\lim\limits_{x\to a}p_n(x)=p_n(a)$.

思考题设 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, $\lim\limits_{y\to A}f(y)=B$, 证明 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))$ 只有 3 种可能性: (1) $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=B$; (2) $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(A)$; (3) 极限 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))$ 不存在.

4.1.5练习题

以下各题要求按照函数极限的定义来做.

1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$.
2. 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3$.
3. 证明: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x^2-x}=0$.
4. 当 a 取什么数值时, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 存在? 此时极限为何?
5. 求 a,b, 使 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$.
6. 问:使得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a+\sin\frac{1}{x}}{x}=\pm\infty$ 的参数 a 是什么?
7. 证明: $\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a$, 其中 $a>0$.
8. 证明: $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a$.
9. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 同时存在或不存在, 而当它们存在时必相等.
10. 问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$ 是否一定同时存在或不存在?
11. 证明:如下定义的 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 在每一点都没有极限.
12. 试举出一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的函数, 使得它在点 $x=1$ 处有极限, 但在区间的其他点都没有极限.
13. 证明: 若 f 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$, 则 $f(x)\equiv 0$.
14. 证明: 任何非常值的周期函数不可能是有理分式函数.

4.2.3思考题

1. 试就 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$ 两类极限叙述极限的唯一性定理、局部有界性定理、局部保号性定理、比较定理、夹逼定理、Heine 归结原理和 Cauchy 收敛准则.

2. 回答下述有关极限的四则运算方面的问题:

   (1) 若 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 存在, 则当 x 趋于 a 时在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的敛散性之间有何联系?

   (2) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 是否存在?

3. 找出以下运算中的错误:

   (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sin\frac{1}{x-2}}=\dfrac{\lim_{x\to 2}(x-2)}{\lim_{x\to 2}\sin\frac{1}{x-2}}=\dfrac{0}{\lim_{x\to 2}\sin\frac{1}{x-2}}=0.$

   (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0.$

4. 对于极限的加法运算法则作出两个证明: (1) 用函数极限定义; (2) 用 Heine 归结原理.

5. 对于各种类型的函数极限中 $A=\infty$ 但不带有确定符号的无穷大量的情况, 夹逼定理不成立. 为什么? 举出反例.

4.2.4思考题

思考题 Heine 归结原理在这里也成立. 试证之.

4.2.4思考题

思考题 Heine 归结原理在这里也成立. 试证之.

4.2.5练习题

1. 证明:

   (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^k}=0\ (a>1,k>0)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0,\ (k>0)$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{a}=1\ (a>0)$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$.

2. 求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+y^3}}{\sqrt{y^2+y^3}+y}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, 其中 n 为自然数.

5. 设已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=l$, $b\neq0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(bx)}{x}$.

6. 证明: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}=1$.

7. 证明: 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调有界函数 f 一定存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

8. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上为单调增加函数, 且存在一个数列 $\{x_n\}\subset(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 证明:
(1) f 在区间 (a,b) 上以 A 为上界; (2) $\lim\limits_{x\to b}f(x)=A$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$. 证明: 对每个 $c\in(0,A)$, 存在 $M>0$, 当 $x>M$ 时, 成立 $f(x)>c$.

10. 设 $f(a^-)<f(a^+)$. 证明: 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a-\delta,a)$ 和 $y\in(a,a+\delta)$ 时, 成立 $f(x)<f(y)$.

11. 试用 Heine 归结原理证明单调函数的单侧极限存在定理. (这里先要将 Heine 归结原理 (命题 4.2.3) 推广到单侧极限. 注意这是在条件中的数列可限于单调数列.)

4.3.4练习题

1. 计算以下极限: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{\tan x}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$;
(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; (5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^2}$; (6) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

2. 注意以下两个不等式并求出正确值: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\neq1$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. 设 $a>0,b>0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.
(本题是数列极限问题, 但现在可以用函数极限只是来解决.)

4. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为正数, $n\geqslant 2$, $f(x)=\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}$, 并证明 Viéte 公式 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

(这是数学家 Viéte 在 1593 年发表的. 它是数学史上第一次用无穷乘积来表示一个数, 同时也是对于圆周率 π 的认识上的重大突破.)

4.4.2思考题

1. 10^{-10000}, $\mathrm{e}^{-10^{10}}$, x, $\sin x$ 是否是无穷小量? 10^{10000}, $\mathrm{e}^{10^{10}}$, x^n, a^x $(a>1)$ 是否是无穷大量?

2. 确定以下极限是否存在, 若存在等于什么?

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x$; (6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$; (7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

3. 当 $x\to 0$ 时, 下述等式中哪些可以成立? (1) $o(1)=O(1)$; (2) $O(1)=o(1)$; (3) $o(x^2)=o(x)$; (4) $O(x^2)=o(x)$; (5) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$; (6) $\dfrac{O(x^2)}{x}=o(x)$.

4. 作出 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的图形, 观察: $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ $(x\to 0^+)$ 和 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=o(1)$ $(x\to 0^-)$.

4.4.4练习题

1. 确定以下无穷小量的阶: (1) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}$ $(x\to 0)$; (2) $\ln x-\ln a$ $(x\to a), a>0$; (3) a^x-1 $(x\to 0)$, 其中 $a>0$; (4) $a^{x^2}-b^{x^2}$ $(x\to 0)$, 其中 $a,b>0$; (5) $\ln\left(x+\cos\dfrac{\pi}{2}x\right)$ $(x\to 1)$; (6) $\ln x\ln(x-1)$ $(x\to 1^+)$.

2. 设存在极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, 又有 $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x)$ $(x\to 0)$, 证明 $f(x)=o(x)$ $(x\to 0)$.

3. 与数列的几个常见的无穷大量之间的关系 $\ln n \ll n^{\varepsilon} \ll a^n \ll n! \ll n^n$ $(a > 1,\ \varepsilon > 0)$ 相类似, 证明当 $x \to +\infty$ 时有 $\ln x \ll x^{\varepsilon} \ll a^x \ll x^x$ $(a > 1,\ \varepsilon > 0)$, 其中 $u \ll v$ 的定义是 $\lim \dfrac{u}{v} = 0$.

4. 用等价量代换方法计算以下极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin^2 x + \mathrm{e}^x) - x}{\ln(x^2 + \mathrm{e}^{2x}) - 2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(x+1)]$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3+2\sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}$;

(6) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{\arcsin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$.

4.5.2参考题

1. 若函数 f 在区间 (a,b) 上单调, 且有一个数列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \to a^+$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. 请按照单侧极限的定义直接证明: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$.

2. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上严格单调增加, 且有一个在区间 $[a,b]$ 内的数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n) \to f(a)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

3. 在 Heine 归结原理 (命题 4.2.3) 的条件中, (1) 若将每个数列 $\{x_n\}$ 改为每个单调数列 $\{x_n\}$, 其他要求不变, 则结论是否仍然成立? (2) 若将每个数列 $\{x_n\}$ 增加要求 $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$, $n \in \mathbb{N}_+$, 其他不变, 则又如何?

又若在它的推论 (命题 4.2.4) 中作这些改动, 结论是否仍然成立?

4. 证明 $\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$ 当 $x \to +\infty$ 时极限为 0, 并分析其阶数.

5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{a^x - 1}{a - 1}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$.

6. (1) 设函数 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 且对所有 x 成立 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$. 证明: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$. (2) 设函数 $f(x) = a_1 \ln(1+x) + a_2 \ln(1+2x) + \cdots + a_n \ln(1+nx)$, 且对所有 x 成立 $|f(x)| \leqslant |x|$. 试陈述与 (1) 相应的不等式并加以证明.

7. 对一般的自然数 n 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin nx - n\sin x}{x^3}$.

8. 证明 Dirichlet 函数 (4.1.5 小节第 4 题) 有以下解析表达式: @跟锦数学微信公众号

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}[\cos(\pi m!x)]^{2n}\right\}.$$

9. (1) 设函数 f 在区间 $(0,+\infty)$ 上满足要求 $f(2x)=f(x)$, 且存在有限极限 $f(+\infty)$. 证明: f 是常值函数. (2) 设存在 $a>0$, $a\neq 1$, 使得函数 f 在区间 $(0,+\infty)$ 上满足要求 $f(ax)=f(x)$. 证明: 若存在有限极限 $f(+\infty)$ 或 $f(0^+)$, 则 f 为常值函数.

10. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上定义, 在 $x=0$ 邻近有界, 又有 $a>1$, $b>1$, 使得对每个 $x\in\mathbb{R}$ 成立 $f(ax)=bf(x)$. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

11. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{x}=1$. 证明: 对每个 $a>0$, 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

12. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上定义, 且在其中的每个上有界子区间上有界. 证明等式 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

在右边为有限极限或 $\pm\infty$ 时成立.

13. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上定义, 且在其中的每个上有界子区间上有界. 证明等式 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$$

在右边为有限极限或 $\pm\infty$ 时成立.

14. 设 T 为正常数, 若函数 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上满足条件: (1) $g(x+T)>g(x)$, $x\in[a,+\infty)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的每个有界子区间上有界; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

15. 设成立 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x)$ $(x\to 0)$. 证明: $f(x)=o(x)$ $(x\to 0)$. (本题比 4.4.4 小节的练习题 2 要难一点.)

第05章连续函数

5.1.2思考题

1. 当 f 于点 a 连续时, 函数 f^2 和 $|f|$ 在点 a 是否连续? 反之如何?

2. 设函数 f, g 在点 a 都不连续, 问 $f+g$ 和 $f\cdot g$ 在点 a 是否连续?

3. 设函数 f 在区间 (a,b) 上有定义, 若对于每个闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$, 函数 f 在 $[c,d]$ 上连续, 证明 f 在 (a,b) 上连续.

4. 讨论下列函数的连续性, 若有间断点则确定它的类型:

(1) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x\in(-\infty,0),\\ x^2, & x\in[0,+\infty);\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x=0;\end{cases}$ (3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 2, & x=0.\end{cases}$

5. 找出下列函数的间断点, 并确定类型: (1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$; (2) $g(x)=x-[x]$; (3) $f(g(x))$ (f 和 g 由 (1) (2) 给定); (4) $g(f(x))$ (f 和 g 同 (3)); (5) $h(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$; (6) $y(x)=\dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

5.1.4练习题

1. 将对偶法则用于连续性的第一定义和第二定义, 写出函数 f 在点 a 处不连续的两个正面叙述. (2) 证明连续性的两个定义的等价性.

2. 讨论下述函数的间断点及其类型:

(1) $f(x)=[x]$; (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=[x]+[-x]$; (4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq 0,\pm1,\\ 1, & x=0,\pm1.\end{cases}$

3. 设函数 $f\in C[a,b]$, 若有数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=A$.

4. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义, 在 $x=0,1$ 两点连续, 且满足 $f(x)=f(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$. 证明: f是常值函数.

5. 设 $f,g\in C(I)$, 证明: $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}\in C(I)$.

6. 设有三个函数 $f_1,f_2,f_3\in C[a,b]$, 对每个 $x\in[a,b]$, 定义 $f(x)$ 是三个函数值 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 中处于中间的一个值, 证明: $f\in C[a,b]$.

7. 证明: f 为连续函数的充分必要条件是:对每个自然数 n, 函数 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=\begin{cases}-n, & f(x)\leqslant -n,\\ f(x), & -n<f(x)\leqslant n,\\ n, & f(x)>n\end{cases}$$

连续.

8. 证明 Dirichlet 函数 $D(x)$ (其定义见第四章 4.1.5 小节第 11 题) 处处不连续, 并确定其类型.

9. 构造一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数, 使得它在某个指定点处连续, 但在所有其他点都不连续.

10. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 证明: 这个函数方程的解除了 $f\equiv 0$ 之外, 就是 $f(x)=a^x$, 其中 $a=f(1)>0$.

11. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]$. 证明: $f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$.

12. 根据 5.1.1 小节中第 5 点给出的定义, 证明: 函数 f 在点 a 连续的充分必要条件是 f 在该点的振幅为 0, 即 $\omega_f(x)=0$.

5.2.1思考题

思考题举例说明: 区间上的函数即使处处不连续, 也可以具有介值性质.

5.2.3练习题

1. 设 $f\in C[a,b]$, $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$, 证明: 存在 $\xi\in[x_1,x_n]$, 使成立 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

2. 设 f 是定义在圆周上的连续函数. 证明: 存在一条直径, 使得 f 在其两端取相同的值.

3. 若余弦多项式 $C_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\cos kx$ 的系数满足条件 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}|a_k|<a_n$, 证明: $C_n(x)$ 在区间 $[0,2\pi)$ 中至少有 $2n$ 个零点.

4. 设 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $b_1<b_2<b_3$. 证明: 方程 $\dfrac{a_1}{x-b_1}+\dfrac{a_2}{x-b_2}+\dfrac{a_3}{x-b_3}=0$ 在区间 (b_1,b_2) 和 (b_2,b_3) 内恰好各有一个根.

5. 证明: (1) 奇数次多项式方程$f(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一个实根. (2) 偶数次多项式方程 $f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x^{+}a_{2n}=0$ 可以没有实根, 但当 $a_{2n}<0$ 时则至少有两个实根.

6. 证明: $x^{17}+\dfrac{215}{1+\cos^2 3x}=18$ 必有实根.

7. 若 $f\in C[a,b]$, 且 $f(x)$ 只取有理数. 问: f 有何特点?

8. 设 $f\in C[a,b]$, 且为一对一映射. 证明: (1) 若 $f(a)<f(b)$, 则 f 严格单调增加; (2) 若 $f(a)>f(b)$, 则 f 严格单调减少.

9. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且有 $f(-\infty)=A<B=f(+\infty)$. 证明: 对每个 $c\in(A,B)$, 存在 ξ, 使得 $f(\xi)=c$.

10. 设 $f\in C[a,b)$, 数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset[a,b)$, 已知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}x_n=b,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=b,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A,\quad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=B,$$

但 $A\neq B$. 证明: 对每一个 $\eta\in(A,B)$, 存在数列 $\{z_n\}\subset[a,b)$, 满足要求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\eta$.

5.3.3练习题

1. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上只有第一类间断点, 证明: f 在 $[a,b]$ 上有界.

2. 若 $f\in C[a,+\infty)$, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

3. 问:是否存在从 (1) $(0,1)$, (2) $[0,1]$, (3) $(0,1]$ 映射到整个实数轴 $\mathbb{R}$ 的连续函数? (如果回答存在, 请举出例子; 如果回答不存在, 请作出证明.)

4. 问: 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的值域为闭区间, 则 f 是否在 $[a,b]$ 上连续?

5. 若 $f \in C[a,+\infty)$, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上至少可以取到最大值或最小值中的一个. (可以与书第 18 页例题 2.2.1 作比较)

6. 若 $f \in C(a,b)$, 且 $f(a^+) = f(b^-) = +\infty$, 证明: f 在 (a,b) 上有最小值.

7. 若 $f \in C(a,b)$, 且 $f(a^+) = f(b^-)$. 证明: f 在 (a,b) 上至少可以取到最大值或最小值中的一个.

8. 若 $f \in C(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$. 证明: 复合函数 $f(f(x))$ 至少在两个点上取到它的最小值.

9. 求出 Dirichlet 函数和 Riemann 函数的所有极值点和最值点.

5.4.2思考题

1. 写出函数 f 在区间 I 上不一致连续的正面叙述.

2. 判断对或错: f 在区间 $[a,b)$ 连续, 则 f 在 $[a,b)$ 上一致连续.

3. 判断对或错: f 在区间 (a,b) 内的每一个闭区间上连续, 则 f 在 (a,b) 上一致连续.

4. 判断对或错: f 在区间 (a,b) 上连续, 又有 $a < c < d < b$, 则 f 在区间 (c,d) 上一致连续.

5.4.5练习题

1. 若 f 在区间 I 上定义, 且存在 $L > 0$, 使得对任一 $x_1, x_2 \in I$ 成立 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$, 则称 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件. 证明: 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件的函数必是一致连续函数.

2. 根据一致连续函数的定义直接证明: 若 f 在 (a,b) 上一致连续, 则 f 有界.

3. (1) 设 f, g 在区间 I 上均为一致连续, 问: 它们的线性组合 $af + bg$ 和乘积 fg 在 I 上是否一致连续? (2) 设 f 在区间 I_1 上一致连续, g 在区间 I_2 上一致连续, 且区间 I_2 包含了 f 的值域, 问: $g \circ f$ 在区间 I_1 上是否一致连续?

4. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 且为周期函数, 证明: f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

5. (1) 设 $f \in C[0,+\infty)$, 且有 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, 证明 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续; (2) 若将 (1) 中的 $ax+b$ 换成 ax^2+bx+c, 结论是否成立? (3) 又若将 $ax+b$ 换成某个函数 $g(x)$, 问: 当 $g(x)$ 具有什么性质时 (1) 中的结论仍成立?

6. 证明: 当 $n>1$ 时, x^n 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

7. 证明: $f(x)=\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 一致连续, 但在 $(0,1)$ 上不一致连续.

8. (1) 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上均一致连续, 但在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续 (注意 $(-1,0)\cup(0,1)$ 不是一个区间.) (2) 若函数 f 在区间 (a,b) 和 $[b,c)$ 上分别一致连续, 问: f 在 (a,c) 上是否一致连续.

9. 讨论以下函数在指定区间上是否一致连续: (可参考书第 118 页图 4.2) (1) 在区间 $(0,1)$ 上的函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$; (2) 在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $\dfrac{\sin x}{x}$; (3) 在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数 $x\sin x$.

5.5.2练习题

1. 设函数 f 在开区间 (a,b) 上定义, 且对每一个点 $x\in(a,b)$, 存在邻域 $O(x)$, 使得 f 在 $O(x)$ 上单调增加, 证明: f 在 (a,b) 上单调增加.

2. 设 $f\in C[a,b]$, 且对 $[a,b]$ 上任一两个有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$ 成立 $f(r_1)\leqslant f(r_2)$, 证明: f 在 $[a,b]$ 上单调增加.

3. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数, 在每一点定义 $g(x)=f(x^+)$, 证明: g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上处处右连续的函数.

4. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数, 且对一切 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明: $f(x)=f(1)x$.

5. 设 $f\in C[a,b]$. 证明: f 在 (a,b) 中没有极值点的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上严格单调.

5.7.2第1组参考题

1. 设非负函数 $f\in C[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明: 对任一实数 $a\in(0,1)$, 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $x_0+a\in[0,1]$, 又满足条件 $f(x_0)=f(x_0+a)$. 又问: 如去掉函数 f 非负的条件, 则结论还成立否?

2. 设 $f\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)$. 证明: $\forall\ n\in\mathbb{N}_+$, 存在 ξ, 使得 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

3. 设 $f\in C[0,1]$, $f([0,1])\subset[0,1]$. 证明: $y=f(x)$ 的图像不仅与直线 $y=x$ 有交点, 而且还与直线 $y=1-x$ 有交点.

4. 设 $f\in C(0,+\infty)$, 又设对每个实数 c, 方程 $f(x)=c$ 至多只有有限个解. 是分别给出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在的充分必要条件, 并加以证明.

5. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 对于任意 x,y, 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$ $(0<k<1)$. 证明: (1) 函数 $kx-f(x)$ 单调增加, (2) 存在唯一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使 $f(\xi)=\xi$.

6. 设 $f_n(x)=x^n+x$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明: (1) 对每个 $n>1$, 方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个根, (2) 若 $c_n\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根, 则存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$. 试求出极限值.

7. 设对每个自然数 n, 数集 $A_n\subset[0,1]$ 是有限集, 而且 $A_i\cap A_j=\varnothing$, $\forall\ i,j\in\mathbb{N}_+$, $i\neq j$. 定义函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 若\ x\in A_n;\\ 0, & 若\ x\in[0,1]\ 但不在任何\ A_n\ 中.\end{cases}$ 对每个 $a\in[0,1]$, 求 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

8. 设函数 f 在区间 I 上只有可去间断点. 定义 $g(x)=\lim\limits_{t\to x}f(t)$, $x\in I$, 证明: $g\in C(I)$.

9. 证明: 若函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且有界, 则对任意给定的 λ, 存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足要求: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}[f(\lambda+x_n)-f(x_n)]=0$.

10. 设函数 f 在区间 I 上满足带指数的 Lipschitz 条件, 即存在 $M>0,\alpha>0$, 使得当 $x,y\in I$ 时, 成立 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$. 证明: 若 $\alpha>1$, 则 f 在 I 上是常值函数.

11. 举出一个函数 f, 它的定义域为 $[0,1]$, 处处不连续, 但它的值域为区间.

12. 设 $f\in C[a,b]$. 证明: 对每个给定的 $\varepsilon>0$, 存在区间 $[a,b]$ 上的分段线性函数 $L(x)$ 使得 $|f(x)-L(x)|<\varepsilon$ 在区间 $[a,b]$ 上处处成立.

13. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

14. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且存在 $k>0$, 使得对任一 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant k|x_1-x_2|$. 证明: f 严格单调且值域为 $(-\infty,+\infty)$.

15. 证明: 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 又问: 如果将连续性条件去掉, 结论还能成立否?

16. 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 其中 $a>0$. 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

17. 证明: 函数 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对任何满条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的 $\{x_n\}\subset I$ 和 $\{y_n\}\subset I$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

18. 证明: 函数 f 在有限区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 当 $\{x_n\}$ 为基本数列时, $\{f(x_n)\}$ 也一定是基本数列.

19. 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=0$.

20. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 证明: 存在非负常数 a 和 b, 使得成立 $|f(x)|\leqslant a|x|+b$.

5.7.2第2组参考题

1. 用连续函数的零点存在定理解决以下实际问题. (1) 一个煎饼, 不论形状如何, 必可切一刀, 使面积二等分. (2) 两个煎饼, 不论形状如何, 相对位置如何, 必可切一刀, 使它们的面积同时二等分 (双煎饼定理). (3) 三个煎饼, 不论形状如何, 相对位置如何, 能否切一刀, 使它们的面积同时二等分? (4) 一个煎饼, 不论形状如何, 是否能以相互垂直的方式切两刀, 使面积四等分? (5) 某短跑运动员用 10 秒跑完 100 米. 证明: 其中至少有一段长为 10 米的路程恰用 1 秒完成. (6) 四只脚的方台砸不平整的地上可能会摇晃. 但如适当转动的话, 一定能找到使它不摇晃的位置. (7) 给定平面上的一条光滑的封闭曲线. 能否作一个包含这条闭曲线的正方形, 并且它的四边都与曲线相切? (本题出现的许多概念, 包括区域边界面积光滑曲线和相切等, 在今后的教学中将会得到严格的数学处理. 但是目前可以采取朴素的观点来对待题中的条件, 因为在所有这些题中, 主要的工具只是零点存在定理, 再加上你的想象力.)

2. 设函数 f 在区间 $[0,n]$ 上连续, 且有 $f(0)=f(n)$, 其中 n 是一个自然数. 证明: 至少存在 n 对不同的 (x,y), 使得 $f(x)=f(y)$, 同时 $x-y$ 为非零正数.

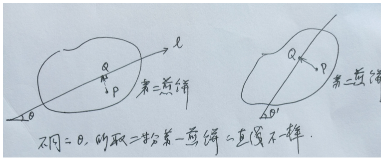


图 9.2: 5.7.2 小节第二组参考题题 1 (2) 的图

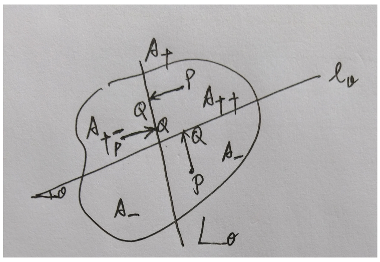


图 9.3: 5.7.2 小节第二组参考题题 1 (4) 的图

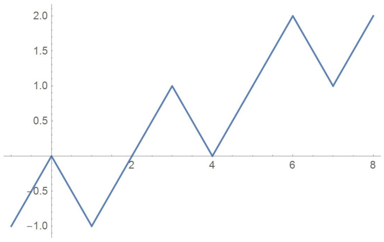


图 9.4: 5.7.2 小节第二组参考题题 5 (2) 的图

3. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上定义, 且处处有极限. 证明: (1) 对每个 $\varepsilon>0$, 在 $[a,b]$ 中使 $\lim\limits_{t\to x} f(t)-f(x)|>\varepsilon$ 的点至多只有有限个, (2) f 在 $[a,b]$ 至多只有可列个间断点.

4. 证明: 区间上的函数不可能以区间的每个点为它的可去间断点.

5. 是否存在定义于 $(-\infty,+\infty)$ 的连续函数 f, 使对于任何 $c\in\mathbb{R}$, (1) 方程 $f(x)=c$ 都恰有两个解? (2) 方程 $f(x)=c$ 都恰有三个解?

6. 设 n 为自然数. 求满足函数方程 $f(x+y^n)=f(x)+(f(y))^n\ (x,y\in\mathbb{R})$ 的所有解.

7. 设 $f\in C[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(f(x))\equiv x$. 证明: $f(x)\equiv x$.

8. 确定使得函数方程 $f(f(x))=kx^9$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续解时参数 k 应满足的充分必要条件.

9. 设 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一对一连续映射, 有不动点, 又满足 $f(2x-f(x))\equiv x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. 证明: $f(x)\equiv x$.

10. 设函数 $f\in C[a,b]$, 定义 $M(x)=\max\limits_{a\leqslant y\leqslant x} f(y)$, $m(x)=\min\limits_{a\leqslant y\leqslant x} f(y)$. 证明: 函数 $M,m\in C[a,b]$.

11. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加, $f(a)>a$, $f(b)<b$. 证明: f 在 (a,b) 内必有不动点.

12. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上满足以下条件: (1) $f(0)>0, f(1)<0$; (2) 存在一个函数 $g\in C[0,1]$, 使得 $f+g$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 证明: f 在 $(0,1)$ 中有零点.

13. 设 f_1,f_2 是分别以 T_1,T_2 为周期的连续函数, 且均非常值函数. 证明: 若周期 T_1,T_2 不可公约, 则 f_1+f_2 不是周期函数.

14. 设 f,g 是周期函数, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 证明: $f(x)\equiv g(x)$. (注意: 本题并不需要 f 和 g 为连续函数的条件.)

15. 证明: 函数 f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对每一个 $\varepsilon>0$, 存在正数 N, 使得当 $x,y\in I$, $x\neq y$ 且 $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>N$ 时, 成立 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

16. 设 f 在开区间 I 上连续, 且于每点 $x\in I$ 取到极大值 (或者于每点取到极小值). 证明: f 为 I 上的常值函数.

17. (本题是上一题的进一步加强) 设 f 在开区间上连续, 且于每一点 $x\in I$ 处取到极值, 证明: f 为 I 上的常值函数.

18. 若 x_0 为 f 的极大值点 (极小值点), 且存在一个邻域 $O(x_0)$, 使得当 $x\in O(x_0)$ 时, 满足不等式 $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$, 则称 x_0 为 f 的严格极大值点 (严格极小值点). 证明: 任何函数的严格极大值点 (严格极小值点) 至多可列, 并举出同时有可列个严格极大值点和严格极小值点的例子. (在每个区间上有严格极大值点和严格极小值点的连续函数也是存在的. 见美国数学月刊, 90 卷 (1983), 281-282 页和 92 卷 (1985), 209-211 页.)

19. 设 $f\in C(0,+\infty)$, 对每个 $x_0>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx_0)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. (本题可以与 Heine 归结原理对比, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 的充分必要条件是对每个严格单调增加的正无穷大数列 $\{x_n\}$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. 本题表明, 当 $f\in C(0,+\infty)$ 时, 上述条件只需对所有等差增加的 $\{x_n\}$ 成立即可.)

20. 设 f 是将区间 $[a,b]$ 映入自身的连续映射. 从 $[a,b]$ 内任一点 x 出发, 用 $x_1=x, x_{n+1}=f(x_n)$ $(n\in\mathbb{N}_+)$ 生成迭代数列 $\{x_n\}$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. (这个出人意料的结果来自 1976 年在美国数学月刊的论文 (83 卷 273 页). 它至少有两方面的意义: (1) 给出了以为迭代数列收敛的一个充分必要条件. 这时只假定迭代函数连续, 与第二章中依赖于单调性的几何方法完

全不同. 当然也与第三张的压缩映像原理无关. (2) 又可看成是 Cauchy 收敛准则在一维迭代数列中的特殊化, 即此时不要求数列中下标任意大的两项之间的差任意小, 只要求前后两项之差任意小即可.)

第06章导数与微分

6.1.2思考题

1. 设 $f \in C(a,b)$, 又在点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导. 在 $x \neq x_0$ 时定义函数 $g(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 问: 如何在 x_0 处补充定义 $g(x)$ 才能使得 $g \in C(a,b)$?

2. 说明 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 的不同意义, 并举出它们取不同数值的例子.

3. $f'(x_0)$ 和 $(f(x_0))'$ 有无区别? 为什么?

4. 验证下列三个函数 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=-\cos^2 x$, $h(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 的导函数均相等? 为什么相等?

5. 若 $f'(x_0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

6. 若 $[f(x^2)]' = [f^2(x)]'$, 证明: 或者 $f(1)=1$, 或者 $f'(1)=0$.

7. (1) 在圆面积公式 $S(r)=\pi r^2$ 和圆周长公式 $l(r)=2\pi r$ 之间有微分学的关系: $S'(r)=l(r)$. 请对此作出解释; (2) 同样, 在球体积公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 和球面积公式 $A(r)=4\pi r^2$ 之间有关系 $V'(r)=A(r)$, 请作出解释; (3) 能否在所知的初等几何计算公式中再找出类似的微分学联系?

8. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导. (1) 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, 是否可以推出 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$? (2) 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, 是否可以推出 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$?

9. 判断以下命题的真假, 并说明理由: (1) 若 f 在 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 则 $f'(0)=0$. 反之也成立; (2) 若 f 在 x_0 可导, 且在某 $O(x_0)$ 内 $f(x)>0$, 则 $f'(x)>0$; (3) 若 f 为 $(-1,1)$ 上的偶函数, 于 $x=0$ 处可导, 则 $f'(x)=0$; (4) 若 f 为 $(-1,1)$ 上的奇函数, 于 $x=0$ 处可导, 则 $f'(x)=0$; (5) 若 f 在 x_0 可导, 则 $|f|$ 也在 x_0 可导. 反之也成立; (6) 若存在极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$, 则 $f(x)$ 与 x_0 可导, 反之也成立.

10. (1) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续, 又右连续, 问 $f(x)$ 在 x_0 是否连续? (2) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 既左侧可导, 又右侧可导, 问 $f(x)$ 在 x_0 是否可导?

6.1.4练习题

1. 证明一下基本事实: (1) 可导的偶函数的导函数为奇函数, (2) 可导的奇函数的导函数为偶函数, (3) 可导的周期函数的导函数为周期函数.

2. 已知偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 求 $f'(0)$.

3. 确定 a 的值, 使两条曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切.

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 均可导. 证明: $f(x)-g(x)=o(x-x_0)$ $(x\to x_0)$ 的充分必要条件是两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 时相切.

5. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)$ 无零点. 证明: 两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=f(x)\sin x$ 在相交处相切.

6. 设 $p(x)$ 是有 n 个实根的 n 次多项式, 记它们的相异根为 $x_1,\cdots,x_k$, 其中 x_i 的重数为 $n_i, i=1,2,\cdots,n, n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 证明: 成立 $p'(x)=p(x)\left(\sum\limits_{i=1}^k \dfrac{n_i}{x-x_i}\right)$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 研究 $f(x)$ 的可导性.

8. 设 n 为自然数, 在什么条件下, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ (1) 在 $x=0$ 连续, (2) 在 $x=0$ 可导, (3) 在 $x=0$ 处导函数连续.

9. 设函数 $f(x)$ 满足函数方程 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, 且已知 $f'(0)=1$. 证明: $f(x)$ 处处可导, 且成立 $f'(x)=f(x)$.

10. 给定函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数},\\ x, & x \text{ 为有理数},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数},\\ x^2, & x \text{ 为有理数},\end{cases}$ 讨论它们的连续性与可导性.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数},\\ x^2+x, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$ (1) 证明 $x\neq 0$ 时, f 不连续; (2) 计算 $f'(0)$.

12. 设在原点某邻域 $O(0)$ 上有 $|f(x)|\leqslant g(x)$, 且 $g(0)=g'(0)=0$. 求 $f'(0)$.

6.2.4练习题

1. 对 $y=\arctan x$, 计算 $y^{(n)}(0)$.

2. 对 $y=(\arctan x)^2$ 计算 $y^{(n)}(0)$.

3. 对 $y=(\arcsin x)^2$ 计算 $y^{(n)}(0)$.

4. 设 $y=x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 证明: $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

5. 求下列函数的 n 阶导函数: (1) $y=\sin^3 x$; (2) $y=\mathrm{e}^x\sin x$; (3) $y=x^{n-1}\ln x$; (4) $y=x^3\mathrm{e}^x$; (5) $y=\dfrac{x^n}{1-x}$; (6) $y=\dfrac{x^n}{(x+1)^2}$; (7) $y=\sin ax\sin bx$.

6. 证明: $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 满足微分方程 $y-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$.

7. 证明: $y=C_1\sin(\omega t+\phi)+C_2\cos(\omega t+\phi)$ 满足微分方程 $y+\omega^2 y=0$.

8. 若曲线由极坐标方程 $\rho=f(\theta)$ 表示, 则可得到参数方程 $x=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$, 求 $y'(x)$.

9. 证明: Archimedes 螺线 $\rho=a\theta$ 与双曲螺线 $\rho=a\theta^{-1}$ 在相交处的切线正交.

10. 对下列参数方程求 $y'(x)$ 和 $y(x)$ (在 (4) 中假定 f 二阶可导): (1) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=at\cos t,\\ y=at\sin t;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t).\end{cases}$

11. 求出由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 确定曲线上有水平切线的点.

12. 是否可以利用函数 $y=\sin x\sin 3x\sin 5x$ 的奇偶性计算 $y(0)$?

13. 是否可以不展开乘积 $y=(6+5x)(4+3x)^2(2+x)^3$ 就求出 $y^{(5)}(0)$?

14. 设 f 为 7 次多项式, 若 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除, $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除, 能否利用导数工具求出 f.

6.3.4练习题

1. 证明: 若 $f'(x_0)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=1$.

2. 设 u, v, w 均为 x 的可微函数, 求 y 的微分:

(1) $y=uvw$; (2) $y=\dfrac{u}{v^2}$; (3) $y=\arctan\dfrac{u}{vw}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.

3. 证明: 在 $x/a^2\approx 0$ 时有近似公式: $\sqrt[n]{a^n+x}=a+\dfrac{x}{na^{n-1}}\ (a>0)$. 并用于计算: (1) $\sqrt[3]{9}$; (2) $\sqrt[4]{80}$; (3) $\sqrt[7]{100}$; (4) $\sqrt[10]{1000}$.

4. 通过单摆振动的试验, 用公式 $g=4\pi^2 l/T^2$ 求重力加速度 g. 分别研究由 (a) 测量摆长 l, (b) 测量周期 T 时的相对误差对 g 的影响.

5. 设要求测量值 x 的常用对数. 问: x 的相对误差会给结果带来什么影响?

6.4.2第1组参考题

1. 利用导数的定义计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}}{\sin x}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, 计算 $f^{(100)}(0)$, 要求相对误差不超过 1%.

3. 设 f 在点 a 可导, $f(a)\neq 0$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

4. 设 $a\neq 0$, 计算 $f(x)=\dfrac{\sin x+\sin(x+a)}{\cos x-\cos(x+a)}$ 的导数并对结果作出解释.

5. 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在. 定义数列 $x_n=f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 求下列数列极限: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

7. 设 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 计算 $y^{(n)}(x)$, $n\in\mathbb{N}_+$.

8. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有任意阶导数, 证明: 对每个自然数 n 成立

$$\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

9. 利用 $1+x+x^2+\cdots+x^n$ 的和, 求以下各式的和: (1) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$; (2) $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$. 又问: 不用微分学的方法能否求出 (1) 与 (2) 中的和?

10. 证明组合恒等式: (1) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$; (2) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$, $n\in\mathbb{N}_+$.

11. 证明: 由抛物线的焦点出发的射线经抛物线反射后一定平行于抛物线的对称轴.

12. 证明: 由椭圆的焦点出发的射线经椭圆反射后一定经过椭圆的另一个焦点.

13. 证明: 在曳物线 $x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y=a\sin t$ 的每一条切线上从切点到与 x 轴的焦点的长度为常数.

14. 证明: 函数 f 在 x_0 可微的充分必要条件是 f 在 x_0 的某个邻域内可以写成 $f(x)=f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)$, 其中 $\phi(x)$ 于 x_0 连续. (上述充要条件称为导数的 Carathéodory 定义. 若在教学中一开始就用它作为导数的定义, 则有不少优点. 这方面可以参考美国数学月刊上的两篇文章 (1991) 40-44 页, (1994) 332-338 页, 还可以参考教材 [69] 在这方面的内容. 本章多次利用例题 6.1.4 中的有限增量公式 (6.3) 的做法与此类似.)

15. 设 $n\geqslant 2$, 函数 $f(x)=f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)$, $\phi(x)$ 在某邻域 $O(x_0)$ 中 $n-1$ 阶可微, 且 $\phi^{(n-1)}(x)$ 于 x_0 连续. 证明: 存在 $f^{(n)}(0)$.

16. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有 n 阶导数, 且存在不全为 0 的 $n+1$ 个常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使得 $a_0f(x)+a_1f'(x)+\cdots+a_nf^{(n)}(x)\equiv 0$. 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上存在任意阶导数.

17. 设多项式 $p(x)$ 只有实零点. 证明: $[p'(x)]^2-p(x)p(x)\geqslant 0,\forall\ x\in\mathbb{R}$.

18. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且使得 $\{x\in[0,1];f(x)=0=f'(x)\}=\varnothing$. 证明: f 在 $[0,1]$ 中只有有限个零点.

19. 对于 $y=\arctan x$, 证明: (1) $y^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $y^{(n)}(x)=\frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$, 其中 $P_n(x)$ 为最高次项系数是 $(-1)^{n-1}n!$ 的 $n-1$ 次多项式.

20. 定义 $f_0(x)\equiv 1$, $f_{n+1}(x)=xf_n(x)-f_n'(x)$, $n=0,1,\cdots$. 证明: (1) $f_n(x)$ 是 n 次多项式; (2) $f_n(x)$ 有 n 个不同实根, 且关于原点对称.

6.4.2第2组参考题

1. (1) 求 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 和 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$; (2) 求求 $\sum_{k=1}^{n}k\sin kx$ 和 $\sum_{k=1}^{n}k\cos kx$.

2. 证明: (例题 5.1.4 中的) Riemann 函数 R 处处不可导.

3. 若从点 (x_0,y_0) 向抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 能够作出两条切线, 或只能作出一条切线, 或不能作出切线. 问: 三种情况下的 (x_0,y_0) 的位置与抛物线有什么关系?

4. 证明: Legendre 多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 满足方程 $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$.

5. 证明: Legendre 多项式满足方程 $(1-x^2)P_n(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$.

6. 分析三项式 $(u+v+w)^n$ 展开的系数规律, 猜测并证明 $(uvw)^{(n)}$ 的一般计算公式.

7. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 当 $|x|\leqslant 1$ 时 $|f(x)|\leqslant 1$. 证明: 当 $|x|\leqslant 1$ 时 $|f'(x)|\leqslant 4$.

8. 证明: 对每个自然数 n 成立 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m=\begin{cases}0, & 0\leqslant m\leqslant n-1,\\ (-1)^n n!, & m=n.\end{cases}$

9. 记 $f_n(x)=x^n\ln x$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

10. 设 f 在 $x=0$ 处连续, 且存在极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$. 证明: $f'(0)=A$.

11. 设 $y=(1+\sqrt{x})^{2n+2}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $y^{(n)}(1)$.

12. 设 $f(x)$ 在区间 I 上三阶可导, $f'(x)\neq 0$, 则可定义 $f(x)$ 的 Schwarz 导数如下: $S(f,x)=\frac{f'(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2=\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2$. 证明: (1) 若 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, 即分式线性函数, 则 $S(f,x)=0$; (2) 若 $p(x)$ 是 x 的多项式, 且 $p'(x)$ 的根都是互不相等的实数, 则 $S(p,x)<0$; (3) 若 f,g 具有所需的各阶导数,

则 $S(f\circ g,x)=S(f,g(x))(g'(x))^2+S(g,x)$; (4) 若 $S(f,x)<0,S(g,x)<0$, 则 $S(f\circ g,x)<0$; (5) 若 $S(f,x)<0$, 又记 $f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 个 }f}$, 则 $S(f^n,x)<0$.

第07章微分学的基本定理

7.1.2思考题

思考题对于下列问题, 如果肯定, 请作出证明; 如果否定, 请举出例子. 1. 如果在命题中将函数 f 在点 a 右连续的条件去掉, 则结论是否还能成立? 2. 如果在命题中的 A 是无穷大量, 而且不具有确定的符号, 则结论是否还能成立? 3. 如果存在 $f'_+(a)=A$, 则是否存在 $f'(a^+)$? 为什么?

7.1.4练习题

1. 用 Rolle 定理解决以下问题 (在方程中出现的系数均为实数):

(1) 证明: 方程 $\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$ 的不同实根不多于 3 个;

(2) 证明: 方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个根;

(3) 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 有 $n+1$ 个 (不同) 实根, 证明: $f(x)\equiv 0$;

(4) 若 $2a^2\leqslant 5b$, 证明: 方程 $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+\mathrm{d}x+e=0$ 不可能有 5 个不同的实根;

(5) 证明: Legendre 多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^nn!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同实根;

(6) 证明: Laguerre 多项式 $L_n(x)=\mathrm{e}^x(x^n\mathrm{e}^{-x})^{(n)}$ 有 n 个不同实根. (这里需要用Rolle 定理的一个推广, 见下面的题 6.)

2. 若 f 在 $[a,b]$ 上满足在 Rolle 定理中的条件, 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明: $f'(x)=0$ 在 (a,b) 中至少有两个根.

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且有 $0<a<b$ 成立. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 $f(b)-f(a)=\ln\dfrac{b}{a}\cdot\xi f'(\xi)$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$. (若应用 Cauchy 中值定理, 则要讨论其条件不满足的情况.)

5. 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 其中 $g(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$. 证明: 存在 $\xi>a$, 使得 $f'(\xi)=0$. (Rolle 定理在无限区间上的推广)

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可微, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$. 证明: 存在 $\xi>a$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

8. 对于 (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$, (2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$, 计算在公式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 中的 θ, 并求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\theta$. (这些计算是检验例题 7.1.4 的结论. 此外 (1) 与第二组参考题 9 有关.)

9. 证明: 当 $x\geqslant0$ 时有 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\dfrac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$, 其具有性质 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

10. 证明: 在区间上的导函数如果单调, 则一定连续.

11. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上可微. 证明: 若 $f(a)$ 是 f 的最大值, 则 $f'_+(a)\leqslant0$; 若 $f(b)$ 是 f 的最小值, 则 $f'_-(b)\geqslant0$.

12. 证明: 在 $|x|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt2}$ 中, 成立 $2\arcsin x\equiv\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

13. 设函数 f 在区间 I 上二阶可微,且 $f''(x)\equiv0$. 问: f 是什么函数?

14. 证明: 在有限开区间 (a,b) 上无界的可微函数的导数也一定无界.

15. 设 f 在 $(0,a)$ 上可微, $f(0^+)=+\infty$. 证明: $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的右侧无下界.

16. 设 f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, $f(a)=f(b)$, 但 f 不是常值函数. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)>0$.

17. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可微, 又知连接点 $A(0,f(0))$ 和 $B(1,f(1))$ 的直线段与曲线 $y=f(x)$ 交于点 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

18. 设 f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 且 $f'(x)$ 无零点. 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}$.

19. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 证明: (1) 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使 $f(\eta)=\eta$; (2) 对任何实数 λ, 存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

20. 设 f 为区间 I 上的可微函数. 证明: f' 为 I 上的常值函数的充分必要条件是 f 为线性函数.

7.2.4练习题

1. 计算 $x\csc x$, $\ln\cos x$, $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ 的 Maclaurin 公式.

2. 能否用 Taylor 公式作如下计算: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x^2)}{x}=1. \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

为什么?

3. 试对函数 $f(x)=(x+a)^n$ $(a\neq0)$ 和 $x_0=0$ 计算它的 Taylor 多项式, 从而得到二项式展开定理的一个新证明.

4. 设 f 在 x_0 存在 $f^{(n)}(x_0)$, 且有 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$ $(x\to x_0)$, 证明: $f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^{n-1})$ $(x\to x_0)$.

5. 用间接法求函数 $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}$ 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式, 要求写出直到 x^{13} 项的系数. 然后利用这个公式计算出函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的直到 13 阶的各阶导数值.

6. 计算 $\arcsin x$ 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式.

7. 计算 $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的带 Peano 余项的 Maclaurin 公式.

8. 估计下列近似公式的绝对误差:(1) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$; (2) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, 当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$; (3) $\tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$, 当 $|x| \leqslant 0.1$; (4) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

9. 若函数 f 在某点 x_0 的任意阶 Taylor 多项式均为 0, 是否可推出 $f(x) \equiv 0$? (参考例题 6.2.4 的结论.)

10. 设 f 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}_+$, 且存在常数 $C \geqslant 0$, 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $x \in [-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)| \leqslant n!C^n$. 证明: $f(x) \equiv 0$.

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得成立 $|f(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$.

12. (1) 设 f 在 (a,b) 上可微. 试问对每个点 $t \in (a,b)$, 是否一定存在两个点 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(t)$? (2) 设 f 在 (a,b) 上可微, 且在某点 $\xi \in (a,b)$ 处 $f(\xi) > 0$. 证明: 存在两个点 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得成立 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$.

13. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且 $f(x) \geqslant 0$, $f''(x) \leqslant 0$, 证明: 在 $x \geqslant a$ 时 $f'(x) \geqslant 0$.

14. 设 f 在 $(-1,1)$ 内 $n+1$ 阶可微, $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在 $0 < |x| < 1$ 上有 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, 证明: $\lim\limits_{x \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

15. 证明: 在 $|x| \leqslant 1$ 时存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - (\theta x)^2}}$, 且有 $\lim\limits_{x \to 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

16. 设 f 在 $O_\delta(x_0)$ 中 n 阶可微, 且 $f(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 证明: 当 $0 < |h| < \delta$ 时, 成立 $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, 且成立 $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.

7.3.2第1组参考题

1. 设有 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1-\frac{1}{3}a_2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$, 证明: 方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 中至少有一根.

2. 设 $c\neq 0$, 证明: 方程 $x^5+ax^4+bx^3+c=0$ 至少有两个根不是实数.

3. 设 $a\neq 0$, 证明: 方程 $x^{2n}+a^{2n}=(x+a)^{2n}$ 只有一个实根 $x=0$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微, 且满足条件
$$f(a)f(b)>0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0,$$
证明: 对每个实数 k, 在 (a, b) 内存在点 ξ, 使成立 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\mathrm{e}^{\lambda_k x}$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为互异实数, $c_1, \cdots, c_n$ 不同时为 0. 证明: f 的零点个数小于 n.

6. (1) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0$, $f(x)\neq 0$, $\forall\ x\in(0,1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立 $2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$. (2) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0$, $f(x)\neq 0$, $\forall\ x\in(0,1)$, 证明: 对每个 $\alpha\neq 0$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立 $|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 但不是线性函数, 证明: 存在 $\xi, \eta\in(a,b)$, 使成立 $f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\eta)$.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 且在某点 $c\in(a,b)$ 处有 $f(c)>0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)<0$.

9. 利用例题 7.1.3 的方法 (或其他方法) 于以下问题: (1) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可微, 且有 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 证明: 对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 $f(x)=\frac{f'(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b)$.

(2) 设 f 在 $[0,1]$ 上五阶可微, 且有 $f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=f(1)=f'(1)=f(1)=0$, 证明: 对每个 $x\in[0,1]$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3.$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 @跟锦数学微信公众号

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'(\xi).$$

(4) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 证明: 对每个 $c\in(a,b)$, 有 $\xi\in(a,b)$, 使成立 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{2}f(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

10. 设 $0<a<b$, f 在 $[a,b]$ 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

11. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上 n 次可微, 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 @跟锦数学微信公众号

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n)\end{vmatrix}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j).$$

12. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$, 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上非一致连续.

13. 设 f 在 $(0,a]$ 可微, 有存在有限极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)$, 证明: f 在 $(0,a]$ 上一致连续.

14. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

15. 对分别满足以下两个条件的 f, 设已知 $f(1)=1$, 求 $f(2)$: (1) $xf'(x)+f(x)=0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$; (2) $xf'(x)-f(x)=0$, $\forall\ x>0$.

16. 设 f 在 $[0,2]$ 上二阶可微, 且 $|f(x)|\leqslant1$, $|f(x)|\leqslant1$, 证明: $|f'(x)|\leqslant2$.

17. 证明: 若在例题 7.2.5 中的区间从 $(0,+\infty)$ 改为 $(-\infty,+\infty)$, 则可以得到更好的估计 $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_1}$.

18. 设当 $x \in [0,1]$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$. 又已知 f 在 $(0,a)$ 中取到最大值. 证明: $|f'(0)|+|f'(a)| \leqslant Ma$.

7.3.2第2组参考题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 在 (a,b) 上二阶可微, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立 $f'(b)-f'(a)=f(\xi)(b-a)$. (注意: 这里没有假定 $f' \in C[a,b]$.)

2. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上无限次可微, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n^2+1}$, 计算 $f^{(k)}(0)$, $\forall\ k \in \mathbb{N}_+$.

3. 证明: 方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-3}-\cdots-2nx+2n+1=0$ 无实根.

4. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且有界, 证明: 存在 ξ, 使成立 $f''(\xi)=0$.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f'(a)=f'(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 又有 $c \in (a,b)$ 使成立 $f'(c)=0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, $f(a)=0$, $f(x)>0$, 证明: 对每个 $\alpha>0$, 存在 $x_1,x_2 \in (a,b)$, 使成立 $\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}=\alpha\dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}$.

8. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微, $|f(x)| \leqslant 1$, 且有 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: 存在 ξ, 使成立 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

9. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可微, 且对所有 $x,h \in \mathbb{R}$ 成立 @跟锦数学微信公众号
$$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right),$$
证明: $f(x)=ax^2+bx+c$.

10. (Schwarz 定理) 定义广义二阶导数 @跟锦数学微信公众号
$$f^{[2]}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}.$$
若 $f \in C[a,b]$, 同时 $f^{[2]}(x)$ 在 (a,b) 上处处等于 0, 证明: f 为线性函数.

11. (Gronwall-Bellman 不等式的微分形式) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且有正常数 $c>0$, 使成立 $|f'(x)|\leqslant c|f(x)|$, $\forall\ x\in[0,+\infty)$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

12. 设 f 在 $[-1,1]$ 上有各阶导数, 且对每个 $n\geqslant 0$ 有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant n!|x|$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

13. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且存在常数 $C\geqslant 0$, 使对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 和 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)|\leqslant C$, 又有 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$, $\forall\ n\in\mathbb{N}_+$ 成立, 证明: $f(x)\equiv 0$.

14. 设 f 在点 x_0 有 n 阶导数, 证明: $f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}f(x_0+kh)$.

15. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 阶可微, @跟锦数学微信公众号

$$M_k=\sup\left\{|f^{(k)}(x)|;\ x\in(-\infty,+\infty)\right\},\ k=0,1,\cdots,n.$$

证明: 若 M_0,M_n 为有限数, 则 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 都是有限数.

16. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上 n 阶可微, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$, 证明: 对每个 $k=1,2,\cdots,n$ 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$.

17. (1) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, $f(x)$ 有界, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. (2) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, (i) 举例说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 不一定的够成立; (ii) 证明: 若 f' 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则一定成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

18. 设 f 在 (a,b) 上任意阶可微, 且对每个自然数 n 有 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ 和 $|f(x)|\leqslant M$, 证明: 对每个 $x\in(a,b)$, $r>0, x+r\in(a,b)$, 成立关于导数的估计式 @跟锦数学微信公众号

$$f^{(n)}(r)\leqslant\frac{2Mn!}{r^n},\ \forall\ n\in\mathbb{N}_+.$$

19. (Bernstein 定理) 设 f 在 (a,b) 上任意阶可微, 且对每个 n 成立 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$, 证明: 对每个 $x_0\in(a,b)$ 存在 $r>0$, 使得当 $x\in[x_0-r,x_0+r]\subset(a,b)$ 时, 成立 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

第08章微分学的应用

8.1.3练习题

1. 以下几个函数极限均不宜用 L'Hospital 法则. 为什么?

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$; (3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. 确定 a,b, 使得当 $x\to0$ 时, 下列函数为尽可能高阶的无穷小量:

(1) $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$; (2) $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$; (3) $f(x)=\cot x-\dfrac{1+ax^2}{x+bx^3}$; (4) $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.

4. 应用 Taylor 公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\sqrt{n^2+2}\pi)$; (5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$.

5. 设存在 $f''(a)$, 证明: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f(a)$.

6. 设 f 在某邻域 $O(x_0)$ 中二阶连续可微, $f'(x_0)\neq0$, $f(x)\neq f(x_0)$, $\forall\ x\neq x_0$. 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right].$$

7. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶连续可微, 且 $f(x)>0$, $f(0)=f'(0)=0$. 试求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$, 其中 u 是函数 f 的图像在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

8. 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^x\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$, 确定其定义域和值域.

9. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=2$.

10. 设 $x_0=\ln a$, $a>0$, $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(a-x_k)$, $n\in\mathbb{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8.2.2练习题

1. 问: 单调函数若可微, 则其导函数是否也单调? 反之又如何? 请举例说明.

2. 证明: 函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$ 且 f' 严格单调增加. 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上也严格单调增加.

4. 设 f,g 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 上可微, $f(0)=g(0)=0$, $f',g'>0$, 证明: 如果 $\dfrac{f'}{g'}$ 单调增加, 则 $\dfrac{f}{g}$ 也单调增加.

5. 设 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 并且满足条件: (1) $f(a)>0$; (2) $f'(a)<0$; (3) 在 $x>a$ 时, $f(x)\leqslant 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有只有一个实根.

6. 设 $f\in C[a,+\infty)$, 且当 $x>a$ 时成立 $f'(x)>k>0$, 其中 k 为常数, 证明: 若 $f(a)<0$, 则于区间 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实根.

7. 设 $a>0$, 证明: 方程 $a\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$ 只有一个实根.

8. 证明: 方程 $f(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}-1\right)\ln x-\ln 2+\ln(1+x^2)=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内只有一个实根.

8.3.2练习题

1. 设 $f\in C(I)$, I 为区间, 证明: 若 x_0 为 f 的唯一极值点, 则 x_0 一定是最值点; 又若 x_0 是极小值点 (极大值点), 则它是 f 的唯一最小值点 (唯一最大值点).

2. 求出方程 $x^3+px+q=0$ 由三个不同实根的充分必要条件.

3. 求出方程 $\dfrac{1}{x^2}+px+q=0$ 有三个不同实根的充分必要条件.

4. 证明: $f(x)=a^2\mathrm{e}^{\lambda x}+b^2\mathrm{e}^{-\lambda x}$ $(a,b>0)$ 存在与 λ 无关的极小值.

5. 证明: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 若不是常值函数, 则不会有极值.

6. 比较 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 和 $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小.

7. 考虑下列几何极值问题(能用初等方法做就不一定用微分学工具): (1) 在面积为定值的三角形中, 什么三角形的周长最小? (2) 在周长为定值的三角形中, 什么三角形的面积最大? (3) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的边长平行坐标轴的内衔矩形中, 面积最大的矩形的长和宽为多少? (4) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内, 边平行于坐标轴的内接矩形中, 周长最大的矩形的长和宽为多少?

8. 考虑给定边界值的二阶非齐次微分方程 $y+p(x)y'+q(x)y=r(x),\ a<x<b,\ y(a)=A,\ y(b)=B$, 其中 p,q,r 是给定的函数, A 和 B 是给定的数, 又设 $q(x)<0,\ \forall\ x\in(a,b)$, 证明: 如果这个微分方程在闭区间 $[a,b]$ 上存在解, 则必唯一.

注. 前面与极值问题有关的材料还有 5.3.3 小节的题 9, 5.5.2 小节的题 5 和第五章第二组参考题 16-18.

8.4.2练习题

本节及以后, 我们记书上的上凸函数为凹函数, 下凸函数为凸函数.

1. 在不假定函数 f 可微的条件下, 证明 Jensen 不等式 (8.11) 仍然成立.

2. 设 f 是区间 (a,b) 上的上凸函数, 且 $f(x)>0$, 证明: $\dfrac{1}{f}$ 是区间 (a,b) 上的下凸函数. 又问: 若在上题中将 f 的上凸条件改为下凸, 则有何结论? (本题的变形是对 f 加上一阶可微或二阶可微条件.)

3. 设 f,g 是 (a,b) 上的下凸函数, 证明: $\max\{f,g\}$ 也是 (a,b) 上的下凸函数.

4. 设 f 和 g 均为区间 I 上的单调增加非负下凸函数, 证明 $f\cdot g$ 为区间 I 上的下凸函数.

5. 设 f 在区间 I 上为下凸函数, 证明: $F(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 也是下凸函数.

6. 设 f 和 g 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数, 问: 复合函数 $f\circ g$ 是否一定是 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数?

7. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数, 证明: f 为单调函数, 或者存在点 c, 使得 f 在 $(-\infty,c]$ 上单调减少, 而在 $[c,+\infty)$ 上单调增加.

8. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且 $f(x)\geqslant 0$, 证明: f 只能是常值函数.

9. 设 f 在 (a,b) 上 n 阶可微 $(n>2)$, $f^{(n)}(x)>0$, 又有 $x_0\in(a,b)$, 使对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 成立 $f^{(k)}(x_0)=0$, 证明: (1) n 为奇数时, f 在 (a,b) 上严格单调增加; (2) n 为偶数时, f 在 (a,b) 上严格下凸.

10. 设 f 在开区间 (c,d) 上为下凸函数, 则 f 一定满足内闭的 Lipschitz 条件. (这就是说对每个有界闭区间 $[a,b]\subset(c,d)$, 存在 $M>0$, 对所有 $x_1,x_2\in[a,b]$, 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$.)

11. 证明: f 在开区间 I 上为下凸函数的充分必要条件是对每个 $c\in I$, 存在 a, 使得在区间 I 上成立不等式 $f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$.

12. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上为下凸函数, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 一定有意义.

13. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数, 又有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 证明: f 是常值函数.

14. 设 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数, 如果有 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)=f(c)=f(b)$, 证明: $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的常值函数.

15. 设 $a<b<c<d$, 证明: 若 f 在 $[a,c]$ 和 $[b,d]$ 上是下凸函数, 则 f 也是 $[a,d]$ 上的下凸函数.

16. 证明: 不存在三次或三次以上的奇次多项式为 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数.

17. 设 f 在区间 (a,b) 上二阶可微, f'' 保号, 证明: 对区间内的任何两点 $a<x_1<x_2<b$ 用 Lagrange 中值定理得到 $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$ 时, 其中的中值 $\xi\in(x_1,x_2)$ 总是唯一的.

18. 若曲线 $y=f(x)$ 以 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点, 且存在 $f''(x_0)$, 证明: $f''(x_0)=0$.

19. 问: 若已知有 $f''(x_0)=0$, 则点 $(x_0,f(x_0))$ 是否一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点?

20. 设 f 在点 x_0 处 n $(n>2)$ 阶可微, 且满足条件 $f(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 请参考命题 8.3.1 写出点 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点的充分必要条件并作出证明.

8.5.3练习题

1. 证明: 当 $x>1$ 时成立 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

2. 证明: 当 $0<a<b$ 时成立不等式 $a\ln a+b\ln b>(a+b)(\ln(a+b)-\ln 2)$.

3. 证明: 对任意 $0<x_1<x_2$, 成立不等式 $\dfrac{x_2-x_1}{x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{x_2-x_1}{x_1}$.

4. 证明以下不等式: (1) $a^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\leqslant\dfrac{1}{n}(a^{x_1}+a^{x_2}+\cdots+a^{x_n})$, 其中 $a>0$;

   (2) $\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leqslant\dfrac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)$, 其中 $p>1$;

   (3) 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n})^{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}$.

5. 证明: 对于 $0<\alpha<1$ 和 $x>1$ 成立 $x^\alpha-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0$, 而当 $\alpha>1$ 时不等式反向成立.

6. 从命题 2.5.1 已知对每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 成立不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 作为进一步的发展, 求出最大的 α 和最小的 β, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant\mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta},\ \forall\ n\in\mathbb{N}_+.$$

   (本题与例题 8.2.3 有联系.)

7. 证明: 对 $0<a<b$ 成立以下不等式: @跟锦数学微信公众号

$$a<\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<b.$$

8. 对于 $2n$ 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 定义加权的 t 阶平均值 (或 t 阶和) 为 $M_t(x,\lambda)=\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ix_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$. 它在 $t=-1$ 时为调和平均值, $t=1$ 时为算术平均值, $t=2$ 时为平方平均值 (即均方根值). 又若在 $t=0,+\infty,-\infty$ 时用极限作补充定义, 则在 $t=0$ 时为几何平均值, $t=+\infty$ 时为 $\max\{x\}$, $t=-\infty$ 时为 $\min\{x\}$. 证明: $M_t(x,\lambda)$ 是 t 的单调增加函数, 在 $n>1$ 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等时为 t 的严格单调增加函数.

9. 证明: 若在 Minkowski 不等式 (8.18) 中的参数 $p\geqslant 1$ 的条件改为 $0<p<1$, 则不等式反向成立.

10. 证明 Young 不等式: 若 $x, y \geqslant 0$, $p, q > 0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则成立不等式 $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}$.

11. 试用 Young 不等式证明: (1) 广义的算术平均值- 几何平均值不等式; (2) Hölder 不等式.

12. 设 f 和 ϕ 在 $x \geqslant a$ 时可微, $f(a)=\phi(a)$, 且当 $x \geqslant a$ 时, 成立 $|f'(x)| \leqslant \phi'(x)$, 证明: 当 $x \geqslant a$ 时, 成立 $|f(x)-f(a)| \leqslant \phi(x)-\phi(a)$.

13. 设 f 满足 $f(1)=1$, 且当 $x \geqslant 1$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$, 证明: 极限 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在, 且小于 $1+\dfrac{\pi}{4}$.

14. 设 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 是每行每列的和均等于 1 的非负元素矩阵, 又有 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 其中两个向量的所有元素也都是非负数, 证明: $y_1 \cdots y_n \geqslant x_1 \cdots x_n$.

15. 若记 $T_n(x)=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ 为 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的 $2n+1$ 次 Taylor 多项式, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sin x > \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \text{ 其中 } x>0,\ n \text{ 为奇数};$$
$$\sin x < \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \text{ 其中 } x>0,\ n \text{ 为偶数}.$$

(例题 8.5.3 是本题的一个特例. 类似地可建立关于 $\cos x$ 的结果.)

16. 证明例题 8.5.4 中右边的不等式.

8.6.2练习题

1. 随手画出一条曲线代表 $y=f(x)$, 然后试画出其一阶导函数和二阶导函数的图形. (本题应作为数学分析课程的基本技能来要求.)

2. 证明: 曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点, 并作图.

3. 作出以下函数的图像:
(1) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$; (2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}$; (3) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; (4) $y=(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$; (5) $y=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>0)$; (6) $y=x^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-x}$; (7) $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$; (8) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$ $(a>0)$; (9) $y=x^x$ $(x>0)$; (10) $y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$.

4. 证明: 方程 $x^y=y^x$ 在第一象限内的图像由一条直线和一条曲线组成, 并作出此图像.

5. 作出以下用参数方程给出的曲线: (1) $x=t^2-2, y=t(t^2-2)$; (2) $x=2t-t^2, y=3t-t^3$; (3) $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$; (4) $x=t-t^3, y=1-t^4$; (5) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ (摆线); (6) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ (圆的渐开线).

8.7.3练习题

本节的计算题应当根据在学习中所能使用的计算工具来安排. 下面的题中只有第 1 题是计算题, 且只需要用计算器.

1. 用 Newton 求根法计算 (要去精确到 0.0001): (1) $x^3-2x^2-4x-7=0$ 在 $[3,4]$ 之间的根的近似值; (2) $\sin x=1-x$ 的根的近似值.

2. 在命题 8.7.1 中给出了保证 Newton 求根法的充分条件, 其中共有 4 项要求. 试举出例子, 说明不满足其中的某些要求时, 用 Newton 求根法有可能失败.

3. 证明: 在命题 5.2.1 中提供的二分法是方程求根的一阶算法.

4. 证明: 2.6.3 小节的题 9 中的算法是求平方根的三阶算法.

5. 设 $A>0$, 从 $x_0>0$ 出发用递推公式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^3+2A)}{2x_n^3+A}$ 作迭代, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 求出其极限, 并确定其收敛的阶.

6. 用 Newton 求根法设计一个求 $\sqrt[k]{A}$ $(A>0,\ k>0)$ 的迭代算法, 并对其收敛速度作出分析.

7. 用 Newton 求根法设计一个求 $\dfrac{1}{A}$ 的迭代算法, 其中只用加法和乘法运算, 并对其收敛速度作出分析.

8.8.2第1组参考题

1. 设 $|f(x)+f'(x)\leqslant 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 证明: $|f(x)|\leqslant 1$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$. 求出 $f(0), f'(0), f(0)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 例题 8.1.10 可推广如下: 设正数数列 $\{x_n\}$ 为满足递推公式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的无穷小量, 函数 f 有 Maclaurin 展开式 $f(x)=x+Ax^k+o(x^k)$ $(x\to 0)$, 其中 k 为大于 1 的某自然数, 系数 $A\neq 0$, 证明: 有 $\alpha>0$, 使得存在非零极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^{\alpha}$, 并求出此极限.

4. 设 $f\in C[a,b]$, 证明: f 在 (a,b) 内没有极值点的充分必要条件是 f 在区间 $[a,b]$ 上为严格单调函数.

5. 证明: 关于三点不等式 (见命题 1.3.4) 的一个推广: 在 $0<p<1$ 时成立不等式 $|a+b|^p\leqslant |a|^p+|b|^p$.

6. 证明: 对每个自然数 n, 成立不等式 $\dfrac{\mathrm{e}}{2n+2}<\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{\mathrm{e}}{2n+1}$.

7. 证明: 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时成立不等式 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$.

8. 证明: 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时成立不等式 $2\sin x+\tan x\geqslant 3x$.

9. 证明: 当 $0<x<1$ 时成立不等式 $\pi<\dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)}\leqslant 4$.

10. 证明: 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时成立比 Jordan 不等式 (例题 8.5.6) 更好的结果: $\sin x\geqslant \dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{1}{12\pi}x(\pi^2-4x^2)$.

11. 证明: 对 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立不等式

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n}\leqslant\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)^n}.$$

12. 证明: 当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 时, 成立 $(\sin x)^{\cos x} < (\cos x)^{\sin x}$, 而在 $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时不等式反向.

13. 设 $p > 1$, $a, b > 0$, 证明: (1) 当 $t > 0$ 时成立 $\dfrac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} a + \left(1 - \dfrac{1}{p}\right) t^{\frac{1}{p}} b \geqslant a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}}$; (2) 当 $0 < t < 1$ 时成立 $t^{1-p} a^p + (1-t)^{1-p} b^p \geqslant (a+b)^p$.

14. 设 $p(x)$ 为三次多项式, $p(a) = p(b) = 0$, 证明: $p(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号的充分必要条件是 $p'(a) p'(b) \leqslant 0$.

15. 证明: 在 $\mathbb{R}$ 上满足函数方程 $g(g(x)) = -x^3 + x + 1$ 的可微函数是不存在的.

16. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0$, $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = -1$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) \geqslant 8$.

17. 设 f 在 $[-1, 1]$ 上三阶可微, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使成立 $f'''(\xi) \geqslant 3$.

18. 设 f, g 在 $[a, b]$ 上连续可微, $f(a) = f(b) = 0$, Wronski 行列式 @跟锦数学微信公众号

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall\ x \in [a, b],$$

证明: $g(x)$ 在 (a, b) 中有零点.

8.8.2第2组参考题

1. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少, 可微, 且满足不等式 $0 < f(x) < |f'(x)|$, 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, 成立不等式 $x f(x) > \dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 若 $f(0) = 0$, 且存在 $f^{(n+1)}(0)$, 定义 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases}$ 证明: $g(x)$ 的 n 阶导函数 $g^{(n)}$ 在 $x = 0$ 连续, 且 $g^{(n)}(0) = \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$. (例题 8.1.9 的推广.)

3. 设 f 在点 a 存在 $f^{(n)}(a)$, 且 $f(a) = 0$, 令 $F(x) = [f(x)]^n$, 证明: 对于 $k = 0, 1, \cdots, n-1$, $F^{(k)}(a) = 0$. 又举例说明: 导数 $f^{(n)}(a)$ 存在的条件不能去掉.

4. 记 $P_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 证明: (1) n 为偶数时 $P_n(x)>0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$; (2) n 为奇数是 $P_n(x)$ 有唯一的实零点; (3) 若将 $P_{2n+1}(x)$ 的零点记为 x_n, $n\in\mathbb{N}_+$, 则 $\{x_n\}$ 为严格单调减少的负无穷大量; (4) 当 $x<0$ 时成立不等式 $P_{2n}(x)>\mathrm{e}^x>P_{2n+1}(x)$; (5) 当 $x>0$ 时成立不等式 $\mathrm{e}^x>P_n(x)\geqslant\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$; (6) 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=\mathrm{e}^x$. (本题中不需要用 Taylor 展开式的知识.)

5. 定义 $x_0=a$, $x_1=b$, $x_{n+1}=\dfrac{(2n-1)x_n+x_{n-1}}{2n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设 $0<x_0<y_0\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 并用递推公式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 和 $y_{n+1}=\sin y_n$ 生成两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

7. 证明: 若函数 $y=\dfrac{ax^2+2bx+c}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$ $(\alpha\neq 0)$ 有三个拐点, 则它们必在一条直线上.

8. 下凸函数的 Jensen 定义是: 称函数 f 在区间 I 上为下凸, 如果对所有 $x_1,x_2\in I$, 成立 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$. 证明: 对连续函数来说, 下凸的 Jensen 定义和 §8.4 节中的下凸定义等价. (确实存在按 Jensen 定义为下凸但不满足 §8.4 节中定义的下凸定义的函数, 例题 5.1.3 的不连续解就是如此 (参见 [53,55,57]).)

9. 设 f 在区间 (a,b) 上按 Jensen 定义为下凸函数, 且至多只有第一类间断点, 证明: f 在 (a,b) 上连续.

10. 设 f 在区间 (a,b) 上按 Jensen 定义为下凸函数, 且在 (a,b) 内的每个闭子区间上有界, 证明: f 在 (a,b) 上连续.

11. 函数 f 在区间 $(-1,1)$ 上二阶可微, $f(0)=f'(0)=0$, 且在该区间上满足不等式 $|f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

12. 设 $f(x)$ 为区间 I 上的可微函数, 满足微分方程 $f'(x)=g(f(x))$, 其中 g 是在 f 的值域上有定义的函数, 证明: f 一定是单调函数.

13. 证明: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微的函数 f 不可能对于一切 x 同时满足不等式 $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$.

14. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可微, 证明: 存在一个点 a 使得 $f(a)f'(a)f(a)f'(a)\geqslant 0$.

15. 设 $p(x)$ 是多项式, 证明: 若对每个 x 成立不等式 $p'''(x)-p''(x)-p'(x)+p(x)\geqslant 0$, 则 $p(x)\geqslant 0$ 对每个 x 成立.

16. 设 P 为多项式, $P(x)$ 有 n 个大于 1 的互异实根, 令 $Q(x)=(x^2+1)P(x)P'(x)+x[(P(x))^2+(P'(x))^2]$, 证明: $Q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个互异实根.

(下面两个题用于证明第二章第二组参考题 19 中所用到的结论.)

17. 设 $f(x)=a^x$, 证明: (1) 如 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 无不动点; (2) 如 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 恰有一个不动点; (3) 如 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 则 f 有两个不动点.

18. 设 $g(x)=a^{a^x}$, 证明: (1) 如 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leqslant a<1$, 则 g 只有一个不动点; (2) 如 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$, 则 g 有三个不动点.

19. 讨论三角方程 $a\sin\theta+b\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=0$ 在 $[0,2\pi)$ 中的实根个数.

20. 从平面上的一个定点向一个给定的椭圆可以引出多少条法线? 讨论在什么区域上法线的条数最多. (本题以及类似的问题最早是由 Appollonius (约公元前 262-前 190 年) 提出和解决的. 又见于数学译林, 1992 年 4 期, 即 V.I. Arnold 给出的构成对物理专业学生的最低限度的数学的一百个问题中的第 7 题.)

第09章不定积分

9.1.2思考题

1. 不定积分与原函数这两个概念有什么区别? 有什么联系?

2. 在 $x=0$ 处不连续的函数 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有原函数?

3. 在不定积分公式 $\displaystyle\int\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x==|x|+C$ 和 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ 中为什么会出现绝对值号?

4. 下列等式是否正确? 说明理由: (1) $\mathrm{d}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$; (2) $\mathrm{d}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int\mathrm{d}f(x)=f(x)$; (4) $\mathrm{d}\displaystyle\int\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}f(x)$; 其中 $\mathrm{d}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是指对于 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 中每一个函数求微分所得到的集合.

5. 以下推导中有什么错误? 用分部积分公式可得到如下等式: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, 因此, $0 = 1$.

9.1.6练习题

1. 计算下列不定积分: (1) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$; (3) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}}\,\mathrm{d}x$; (5) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$; (6) $\displaystyle\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$; (7) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x$; (9) $\displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$; (10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

2. 用配对积分法计算下列不定积分:
(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$; (2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$; (3) $\displaystyle\int \frac{b\sin x+a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x\ (a \neq b)$; (4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

3. 通过计算下列不定积分 $\displaystyle\int(\cos^4 x-\sin^4 x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int(\cos^4 x+\sin^4 x)\,\mathrm{d}x$, 进而求出不定积分 $\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

4. 导出计算下列不定积分的递推公式:
(1) $\displaystyle\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \tan^n x\,\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int \sec^n x\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

5. 试求: (1) $\displaystyle\int xf(x)\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

6. 设对任意自然数 m,n, 定义 $I(m,n)=\displaystyle\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 证明:

(1) $I(m,n) = -\dfrac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$;

(2) $I(n,n) = -\dfrac{\cos 2x\sin^{n-1}x\cos^{n-1}x}{4n} + \dfrac{n-1}{4n}I(n-2,n-2)$.

9.2.4练习题

1. 用观察法将被积函数拆开后计算不定积分:

(1) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} \mathrm{d} x$; (2) $\int \frac{x^2+x+1}{x(1+x^2)} \mathrm{d} x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d} x}{x^4(x^2+1)}$; (4) $\int \frac{4 x^2+3}{(x^2+1)(x^2+2)} \mathrm{d} x$.

2. 计算下列有理函数的不定积分: (1) $\int \frac{x^5-x}{1+x^8} \mathrm{d} x$; (2) $\int \frac{\mathrm{d} x}{x(x^n+a)}$ $(a \neq 0)$; (3) $\int \frac{x \mathrm{d} x}{(x+1)(x^2+3)}$; (4) $\int \frac{x-1}{(x^2+2 x+3)^2} \mathrm{d} x$; (5) $\int \frac{1+x+x^2}{(x-2)^{10}} \mathrm{d} x$;

(6) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5 x^2+6 x} \mathrm{d} x$; (7) $\int \frac{\mathrm{d} x}{1+x^6}$; (8) $\int \frac{x^2-x+3}{(x^2+x+1)(x-1)^2} \mathrm{d} x$.

3. 讨论下列三角函数有理式的不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d} x}{1+\cos x}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sin x \cos^4 x}$; (3) $\int \frac{\mathrm{d} x}{2+\tan^2 x}$; (4) $\int \tan^5 x \sec^3 x \mathrm{d} x$;

(5) $\int \frac{\sec x}{(1+\sec x)^2} \mathrm{d} x$; (6) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x+\cos x} \mathrm{d} x$; (7) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} \mathrm{d} x$;

(8) $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

4. 计算 Poisson 积分 $\int \frac{1-r^2}{1-2 r \cos x+r^2} \mathrm{d} x$, $(-1<r<1)$.

5. 计算下列无理函数的不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sqrt{\sin x \cos 7 x}}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d} x}{x \sqrt{2 x^2+3}}$; (3) $\int \sqrt{\tan^2 x+2} \mathrm{d} x$; (4) $\int \frac{x \mathrm{e}^x \mathrm{d} x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$; (6) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} \mathrm{d} x$.

9.3.2参考题

1. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 4 x+\tan^2 x$, $0<x<1$, 求函数 $f(x)$.

2. 计算下列不定积分:

(1) $\int x \arctan x \ln(1+x^2) \mathrm{d} x$; (2) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \mathrm{d} x$; (3) $\int[x]|\sin \pi x| \mathrm{d} x$ $(x \geqslant 0)$; (4) $\int \sin x \ln(\sin x) \mathrm{d} x$; (5) $\int \frac{\mathrm{d} x}{\sin(x+a) \sin(x+b)}$; (6) $\int \frac{1-x^n}{x(1+x^n)} \mathrm{d} x$ $(n \in \mathbb{N}_+)$.

3. 对每个自然数 n, 定义 $I_n=\int \frac{(a x+b)^n}{\sqrt{c x+d}} \mathrm{d} x$, 求出计算 I_n 的递推公式.

4. 对于实数 $a \neq 0$ 与自然数 $n > 2$, 定义 $I_n = \int \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n \mathrm{d}x$. 证明: 对于 I_n 有递推公式 $I_n = \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1} - I_{n-2} + 2I_{n-1}\cos a$, 其中 $t = \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$.

5. 设 Q 为 n 次多项式, 且具有 n 个相异实根 $x_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 又设 P 是与 Q 不可约的 m 次多项式, 且 $m < n$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \ln|x - x_i| + C.$$

6. 求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 为 x 到离其最近的整数的距离.

7. Liouville 在十九世纪三十年代对于初等函数的不定积分在什么条件下是初等函数进行过深入的研究 (参见 [54]), 他得到的一个结果是:

   定理设 f, g 为有理函数, g 不是常值函数, 如果 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则存在有理函数 h, 使得 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\,\mathrm{d}x = h(x)\mathrm{e}^{g(x)} + C$.

   试用这个定理证明: $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 都是非初等不定积分 (由后者又可推出 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 也是非初等不定积分).

第10章定积分

10.1.3练习题

对下面的前 10 个题来说, 每题至少可以有两个解法, 其中的一个解法是从定积分定义出发, 而另一个解法是以 Lebesgue 定理 (命题 10.1.6) 为根据的, 这两种解法的思路很不一样. 初学者通过这样的训练既可以熟悉定积分的基本出发点, 又可以学到应用 Lebesgue 定理和相关的概念去处理右边的 Riemann 可积函数. 对于今后遇到的有关可积函数的问题都可以如此考虑.

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$ 问 f 在 $[0,1]$ 上是否可积?

2. 设 $f, g \in R[a,b]$, 且 f 的值域为 $[a,b]$, 问 $g \circ f$ 在 $[a,b]$ 上是否可积? 又若 f, g 在 $[a,b]$ 上都不可积, 问 $g \circ f$ 在 $[a,b]$ 上是否一定不可积?

3. 讨论区间 $[a,b]$ 上 $f,|f|,f^2$ 可积性之间的关系.

4. 设 $f\in R[a,b]$, g 与 f 仅在有限个点上取不同值, 证明: $g\in R[a,b]$, 并且 $\int_a^b f=\int_a^b g$ (因此对于 $[a,b]$ 上的有界函数, 如果它在有限个点上没有定义, 我们可以采取补充定义的的方法进行讨论. 这时的可积性和可积时的积分值与补充定义的具体做法无关). 又问: 如果 f 和 g 在 $[a,b]$ 上几乎处处相等, 例如只在所有有理点上的函数值不同, 则是否有相同的结论?

5. 设 $f\in R[a,b]$, 且对每个 $(\alpha,\beta)\subset[a,b],\exists\ x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, 使 $f(x_1)f(x_2)\leqslant 0$, 问定积分 $\int_a^b f$ 的值是多少? 为什么?

6. 设 $g\in R[a,b]$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{g(x)\}$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{g(x)\}$, 如果 $m<M$, $f\in C[m,M]$, 证明: $f\circ g\in R[a,b]$.

7. 设 $f\in R[a,b]$, 且 $1/f$ 在 $[a,b]$ 上有界, 证明: $1/f\in R[a,b]$.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且其所有间断点构成一个收敛数列, 证明: $f\in R[a,b]$.

9. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上的每一点的极限都存在且等于零, 证明 $f\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f=0$.

10. 证明: Riemann 函数 (见例题 5.1.4) 在每个有界闭区间 $[a,b]$ 上可积.

11. 对连续函数, 能否如下定义定积分: 如果 $f\in C[a,b]$ 且存在实数 I, 使 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)=I,$$

则 $f\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f=I$.

12. 设 $f,g\in R[a,b]$, $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的分划, 证明: $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$, 是对于满足 $\|P\|<\delta$ 的任意分割 P, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\Delta x_k-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

10.2.1思考题

思考题

(1) 举例说明: 在积分第一中值定理中 g 的保号性条件不满足时, 定理的结论可以不成立.

(2) 举例说明: 在积分第二中值定理中 g 不是单调函数时, 定理的结论可以不成立.

10.2.4练习题

1. 设 $f \in C[a,b]$, 且对满足条件 $g(a)=g(b)=0$ 的每个函数 $g \in C[a,b]$, 都有 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: $f \equiv 0$.

2. 设非负函数 $f \in R[a,b]$, 且 $\int_a^b f>0$, 若有多项式 P 使 $\int_a^b P^2(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: $P \equiv 0$.

3. 设 $f \in C[-1,1]$, 且对 $[-1,1]$ 上的每个可积偶函数 g 都有 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: f 是 $[-1,1]$ 上的奇函数.

4. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

5. 分析例题 10.2.4 的条件和证明过程, 试写出它的可能推广, 并作出证明. (这是一道开放题, 要求设计一定的条件, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x=0$ 成立.)

6. 已知 $x_n \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], n=1,2,\cdots$, 且满足 $\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^n x_n\,\mathrm{d}x=\sin^n x_n$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f \in C[-1,1]$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \dfrac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\pi f(0)$.

8. 设 $f \in C[0,1]$, 计算: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

9. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a_n} x^n\,\mathrm{d}x=2$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

10. 设 $n \in \mathbb{N}_+$, $I_n=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$.

10.3.1思考题

思考题举例: (1) 可积函数未必有原函数; (2) 有原函数的函数未必可积.

10.3.3练习题

1. 计算下列各题: (1) $\left(\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)'_{x=0}$; (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$;
   (3) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{x^2}$; (4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.
2. 设 $f\in C[a,b]$, 且存在常数 $M,\eta>0$, 使对每个 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 恒有 @跟锦数学微信公众号
   $$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(\beta-\alpha)^{1+\eta},$$
   证明: $f\equiv 0$.
3. 设 $f\in C[a,b]$, 且在 $[a,b]$ 上满足不等式 $f(x)\leqslant\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 证明: 在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$.
4. 设函数 $f\in C[0,\pi]$, 且有 $\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0$, 证明: f 在区间 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.
5. 设 f 为周期函数, 且于每个有界区间上可积, 证明: 变上限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可以表示为一个周期函数与一个线性函数之和.
6. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 且积分 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关, 证明: f 为周期函数.
7. 设 $f\in C(0,+\infty)$, 且对任何 $a,b>0$, 积分 $\int_a^{ab} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关, 试求函数 f.
8. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使成立 $\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$, 并举例说明这样的 ξ 在 (a,b) 内不一定存在.
9. 设 $f\in C[a,b]$, 且处处大于 0, 证明: 在 $[a,b]$ 上有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right]\geqslant 2$.
10. 设 $a(t),b(t),c(t),d(t)$ 均为变量 t 的多项式, 证明: $\int_1^x a(t)c(t)\,\mathrm{d}t\int_1^x b(t)d(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^x a(t)d(t)\,\mathrm{d}t\int_1^x b(t)c(t)\,\mathrm{d}t$ 可被 $(x-1)^4$ 整除.
11. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 且单调减少, 证明: $f\equiv 0$.

12. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且满足 $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 f.

10.4.6练习题

1. Cauchy 曾经用下面的例子说明用 Newton-Leibniz 公式时必须验证条件, 请指出以下计算中的错误并作更正: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{3\pi/4}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\arctan(\sec x)\big|_0^{3\pi/4}=-\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}.$$

2. 计算下列各题: (1) $\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-2}^2\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\cos t}}$; (4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$; (5) $\int_0^\pi\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$.

3. 利用对称性, 计算下列各题: (1) $\int_0^\pi\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$; (2) $\int_0^1\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-2}^2 x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$; (5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^\pi\frac{a^n\sin^2 x+b^n\cos^2 x}{a^{2n}\sin^2 x+b^{2n}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

4. 设 $f\in C[0,a], a>0$.

(1) 在 $[0,a]$ 上 $f(x)+f(a-x)\neq 0$, 计算 $I=\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x$; (2) 在 $[0,a]$ 上 $f(x)f(a-x)\equiv 1$, 计算 $I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

5. 设 f 为连续函数, 证明下列等式:

(1) $\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

(3) $\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^\pi f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos x\right)\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $n\in\mathbb{N}_+$, 计算 $\int_0^\pi\sin^{2n-1}x\cos(2n+1)x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^\pi\cos^{2n-1}x\sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x$.

7. 计算 $I(m,n)=\int_0^1 x^m\ln^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 m,n 是正整数.

8. 计算 $J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 m,n 是正整数.

9. 求 $F'(0)$, 其中 $F(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

10. (Fejér (费耶尔) 积分) 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}$.

11. 定义 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$, $x\in(-\infty,+\infty)$. (1) 证明: f 是周期为 π 的周期函数; (2) 求 f 的最大值与最小值.

12. 设 $f\in C[0,1]$, 且在 $(0,1)$ 上可微, 如果 $\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}f(0)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=0$.

10.5.2第1组参考题

1. 设 m 为正整数, $0<a<b$, 试从定积分的定义出发计算 $\int_a^b x^m\,\mathrm{d}x$.

2. (1) 举例: 从 $|f|\in R[a,b]$ 未必能推出 $f\in R[a,b]$; (2) 证明: 若 f 是导函数, 则当 $|f|\in R[a,b]$ 时, 就一定有 $f\in R[a,b]$.

3. 设 $f,g\in R[a,b]$, ξ 和 ξ' 是从属于分划 P 的两个不同介点集, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在区间 $I=(a,b)$ 上为下凸函数, 证明: f 的两个单侧导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 在 I 中的任意有界闭区域 $[c,d]$ 上可积, 且成立 Newton-Leibniz 公式: @跟锦数学微信公众号

$$f(d)-f(c)=\int_c^d f'_-(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^d f'_+(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: 对于每一个给定的 $\varepsilon>0$, 存在函数 g 使得 $\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$, 其中的 g 是: (1) 阶梯函数; (2) 折线函数; (3) 连续函数; (4) 连续可微函数.

6. 证明积分的连续性命题: 设 $f \in R[a-\delta, b+\delta]$, 其中 $\delta > 0$, 则有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

7. 设 $f \in R[a,b]$, 证明: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ [c,d] \subset [a,b]$, 使 f 在子区间 $[c,d]$ 上的振幅 $\omega_{f[c,d]} < \varepsilon$.

8. 设 $f \in R[a,b]$, 证明: f 的连续点在 $[a,b]$ 中稠密 (即 f 在 $[a,b]$ 的每个子区间 (c,d) 中有连续点).

9. 设非负函数 $f \in R[a,b]$, 求证: 积分 $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = 0$ 的充分必要条件是 f 在所有连续点处的值都等于 0.

10. 设 $f, g \in R[a,b]$, 且在 $[a,b]$ 的每个子区间中有 x 使得 $f(x) = g(x)$, 证明: $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$.

11. (积分第一中值定理的一种推广) 证明: 设 $f, g \in R[a,b]$, 其中 f 在 $[a,b]$ 上有原函数, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

12. 计算以下渐近等式 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)$$

中的待定常数 a, b.

13. 设非负严格增加函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 有积分中值定理, 对于每个 $p > 0$ 存在唯一的 $x_p \in (a,b)$, 使 @跟锦数学微信公众号

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(t) \, \mathrm{d}t.$$

试求 $\lim\limits_{p \to \infty} x_p$.

14. 设 $f \in C[0, +\infty)$, a 为实数, 且存在有限极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) + a \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \right].$$

证明; $f(+\infty) = 0$.

15. 设 $f \in C(-\infty, +\infty)$, 定义 $F(x) = \int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$, $a \leqslant x \leqslant b$. (1) 证明: F 在 $[a,b]$ 上可导; (2) 计算 $F'(x)$.

16. 设 $n \in \mathbb{N}^+$, 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

17. 令 $B(m,n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}$, $m,n \in \mathbb{N}^+$. (1) 证明 $B(m,n) = B(n,m)$; (2) 计算 $B(m,n)$.

18. 证明: 当 $m < 2$ 时, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^m}\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.

19. 证明: 当 $\lambda < 1$ 时, $\lim_{R\to+\infty} R^\lambda \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.

20. 设 $f \in C^2[0,\pi]$, 且 $f(\pi) = 2$, $\int_0^\pi [f(x) + f(x)]\sin x\,\mathrm{d}x = 5$. 求 $f(0)$.

21. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 找出满足条件

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = a, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a^2$$

的所有 f, 其中 a 为给定实数.

22. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且满足条件 $f(1) = 3\int_0^{1/3} \mathrm{e}^{x-1} f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

23. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续正函数, 且 $f^2(t) \leqslant 1 + 2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. 证明: $f(t) \leqslant 1 + t$.

24. 设 $f \in C^1[1,+\infty)$, $f(1) = 1$, 且当 $x \geqslant 1$ 时有 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$, 证明: 存在有限极限 $f(+\infty)$, 且 $f(+\infty) < 1 + \frac{1}{4}\pi$.
(本题与 8.5.3 小节题 13 相同, 当然这里可以用积分方法做.)

25. 证明: $\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = 0$.

10.5.2第2组参考题

1. (连续量的平均值) 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的单调函数, 定义 f 的平均值为 $F(x) = \begin{cases} f(0^+), & x = 0, \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x > 0. \end{cases}$ 证明: (1) F 在 $[0,+\infty)$ 上为单调连续函数, 且与 f 具

有相同的单调性; (2) $F(+\infty)=f(+\infty)$.

2. 证明: $f\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f=I$ 的充分必要条件是存在 $[a,b]$ 的一个分割序列 $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$, 满足条件 $\lim\limits_{k\to\infty}\|P_k\|=0$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k}f(\xi_{k,i})\Delta x_{k,i}=I$, 而且极限值不依赖于介点集的选取. (本题表明在 Riemann 积分的定义中分划的任意性要求可以降低. 例如用等距分划也是可以的.)

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界, 证明: 如果存在常数 I, 是对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 只要 $\|P\|<\delta$, 就有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$, 则 $f\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f=I$.

(不引入介点集来定义的积分在历史上称为 Cauchy 积分. 本题表明对于有界函数来说, Cauchy 积分与 Riemann 积分一致.)

4. (Riemann 定理) 设 $f\in R[a,b]$, g 以 T 为周期且在 $[0,T]$ 上可积, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 是一个 n 次多项式, 且满足条件 $\int_0^1 x^kf(x)\,\mathrm{d}x=0, k=1,2,\cdots,n$, 证明: $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

6. 计算下列积分: (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\,\mathrm{d}x$.

7. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0$.

8. 1996 年发下来计算圆周率的全新算法, 它可以计算圆周率在任意指定位数上的数字, 而不必求出这一位之前的每一位数字. 这种算法的基础是关于圆周率的新公式. 它涉及一个积分的两种计算方法. 下面的问题就是其中的前一半. 其余部分见下册的例题 16.2.6. 证明: $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x=\pi$.

第11章积分学的应用

11.1.4练习题

由于在习题集 [27] 及其学习指引 [59]) 和各种教科书中都有许多集合计算题可用, 因此本节只收入少量练习题作为补充.

1. 设椭圆方程为 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$, 其中 $A>0, \Delta=AC-B^2>0$. 设试用例题 11.1.1 中的第三种方法(即公式 (11.1)) 证明: 由该椭圆围成的面积等于 $\dfrac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$.

2. 试以公式 (11.1) 为出发点, 推导极坐标下的扇形面积计算公式 (11.2).

3. 已知三个半径为 r 的圆, 其中每个圆的圆周都通过另外两个圆的圆心, 求三个圆公共部分的面积. (本题有不用微积分的初等解法.)

4. 周长一定的等腰三角形, 腰与底的比例为多少时, 它绕底边旋转所得的旋转体体积最大?

5. 半轴长为 a 和 b 的一个椭圆在曲线 $y=c\sin\dfrac{x}{a}$ 上进行无滑动地地滚动, 问 a, b, c 之间的关系怎样时, 椭圆在曲线上滚动了曲线的一个周期时, 它正好转了一周?

6. 在单位圆周上任意取一段位于第一象限且长度为 s 的弧, 设位于该弧下方、x 轴上方的曲边梯形的面积为 A, 而位于该弧左侧、y 轴右侧的曲边梯形的面积为 B. 证明: $A+B$ 只依赖于弧的长度 s, 而与弧的位置无关.

7. 试求抛物线 $y^2=2x$ 与其过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

8. 至少用两种方法计算下列三个圆的公共部分的面积: $x^2+y^2\leqslant 4, (x-2)^2+y^2\leqslant 4, x^2+(y-2)^2\leqslant 4$.

9. 求椭圆柱 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{100}\leqslant 1$ 夹在平面 $z=0, y=2z$ 之间部分的体积.

10. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=a^2$ 所围立体区域的体积.

    (这个立体区域在中国古代数学史上称为牟合方盖, 它是刘徽在研究球体积计算问题中提出来的, 见 [35]. 在这之前, Archimedes 在其著作《方法》的命题 15 中已经给出了这个立体区域的体积计算 (参见 [60] 的 192 页).)

11.2.5练习题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加, 证明: 对每个 $c\in(a,b)$, 函数 $F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为 $[a,b]$ 上的下凸函数.

2. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上是下凸函数, 证明: 函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数.

3. 设 f 于 $[0,1]$ 上为非负的上凸函数, 证明: $\int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上为上凸可微函数, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=\alpha>0$, $f'(b)=\beta<0$. 证明: $0\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}$.

5. 设 $f\in C^1[0,2]$, $f(0)=f(2)=1$, $|f'(x)|\leqslant 1$. 证明: $\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant 1$.

6. 已知函数 $f\in C[a,b]$, 且 $f(x)$ 处处大于 0, 证明: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$.

7. 已知非负函数 $f\in R[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$, k 为实数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1.$$

8. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明比例题 11.2.3 更强的不等式: @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

9. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微且当 $x\in(0,1)$ 时, $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, $f(0)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=x$ 时成立等号.

10. (1) 试用 Young 不等式证明: 当 $a,b\geqslant 1$ 时成立 $ab\leqslant\mathrm{e}^{a-1}+b\ln b$; (2) 设函数 $f\in R[a,b]$, 试用 Minkowski 不等式证明下面两个不等式不能同时成立: $\int_0^\pi|f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{4}$ 和 $\int_0^\pi|f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{3}{4}$.

11.3.3练习题

1. 证明: (1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,\mathrm{d}x > 0$; (2) $\displaystyle\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{10}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{20}$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \frac{n^2\pi^2}{4}$; (4) $\displaystyle 0 < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi^3}{144}$;

(5) $\displaystyle 0.005 < \int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < 0.01$; (6) $\displaystyle\frac{2}{9}\pi^2 < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{3}\pi^2$.

2. 设 f 在 $[0,a]$ $(a>0)$ 上有可积的导函数, 证明: $\displaystyle|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x$.

3. 设 f 在 $[0,1]$ 上有可积的导函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

4. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)| \leqslant M$, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 对于函数 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. (1) 证明: $|F(x)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{8}$; (2) 在增加条件 $f(a)=f(b)=0$ 时证明: $|F(x)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{16}$.

5. 证明: 对每个正整数 n, 成立 $\displaystyle\frac{2}{3}n\sqrt{n} < 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$, $|f'(x)| \leqslant M$, 证明: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2$.

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, $|f(x)| \leqslant M$, 证明: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{12}(b-a)^3$.

8. (矩形公式) 设 $f \in C^2[a,b]$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(\xi)(b-a)^3}{24}.$$

9. 设 f 在 $[-1,1]$ 上可微, 且有 $a\in(0,1)$, 使得 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(1-a^2).$$

10. 设 f 于 $[0,1]$ 上可微, $|f'(x)|\leqslant M$, 证明: $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

11. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上可微, 且 $f'\in R[0,1]$, 对正整数 n 定义 $A_n=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nA_n=\frac{1}{2}(f(0)-f(1))$.

12. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上二阶可微, 且 $f\in R[0,1]$, 对正整数 n 定义 $B_n=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2B_n=\frac{1}{24}[f'(1)-f'(0)]$.

11.4.5练习题

1. 求下列极限: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[1^a+3^a+(2n+1)^a]^{b+1}}{[2^b+4^b+\cdots+(2n)^b]^{a+1}}$, 其中 $a,b\neq-1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(2+\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{\pi}{n}}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k-1)}$ $(x>0)$.

(题 (4) 可利用第十一章第二组参考题 2 中的 Poisson 积分, 题 (6) 可利用第十章第一组参考题 3.)

2. 证明对于区间 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 中的数 A, 存在 N 使 $n>N$ 时, 成立 $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<An^{\frac{3}{2}}$, 并与 11.3.3 小节的题 5 在方法和结果上进行比较.

3. 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(x)$ 处处大于 0, 求极限 @跟锦数学微信公众号
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}.$$

由此导出算术平均值-几何平均值的积分形式, 并与 11.2.1 小节的不等式 (11.10) 作比较.

4. 设 $A_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln 2-A_n)$.

5. 设 $B_n=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\cdots+\frac{2}{4n-1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\ln 2-B_n)$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

7. 试从 Stirling 公式 (命题 11.4.2) 的证明中推导出 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{4n}}$, 其中 $0<\theta_n<1$. (在第十一章第二组参考题 15 中有更好的结果, 但需要比 (11.34) 更强的不等式.)

8. 试写出 $(2n)!!$, $(2n-1)!!$ 和 C_{2n}^n 的渐近公式.

9. 利用 Sitrling 公式计算下列极限: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{n!}{n^n\sqrt{n}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}\sqrt{n}$.

10. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^{1+\gamma}}$, 其中 γ 为 Euler 常数.

11.5.2第1组参考题

1. 设 $f\in C^1[0,1]$, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明: $\int_0^1|f(x)-f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. 设 $a>0$, 证明: $\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^3}{4}$.

3. (Tchebycheff (切比雪夫) 不等式) (1) 设 $F\in C[a,b]$, 处处大于 0, 且单调减少, 证明:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b xF^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b F^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b xF(x)\,\mathrm{d}x;$$

(2) 设 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且对任何 $x<y$ 具有性质 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geqslant 0$, 又设 $p\in R[a,b]$, 且处处大于 0, 证明:

$$\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0 \leqslant f < 1$, 证明: $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$.

5. 证明不等式: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f^{(2n)} \in C[a,b]$, 且 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$, $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left\{\left|f^{(2n)}(x)\right|\right\}.$$

7. 设函数 $f,g \in C[a,b]$, 且 $f(x) \not\equiv 0$, $g(x)$ 处处大于 0. 记 @跟锦数学微信公众号

$$d_n = \int_a^b |f(x)|^n g(x)\,\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

试证: 数列 $\left\{\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限.

8. 计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

9. 对任意实数 a, 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\sqrt{2k-1}}{n}a^2\right) = \mathrm{e}^{-\frac{a^4}{2}}$.

10. 设 f 是 $[1,\infty)$ 上的非负单调减少函数, 令 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_+$. 试证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛. (这是面积原理的一个简单情况 (参见 [26]). 取 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, 就得到关于 Euler 常数的命题 2.5.6; 取 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 就是第二章第一组参考题 14.)

11. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \sin x^2\,\mathrm{d}x$, 使得误差不超过 0.001.

12. 证明: 函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $(0,1]$ 上有无穷多个零点.

13. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, f' 单调增加且有 $f'(x) \geqslant m > 0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}.$$

14. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且满足 $f'(x) \geqslant m > 0$, $|f(x)| \leqslant \pi$, 证明: $\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}$.

15. 对 $n \in \mathbb{N}_+$, 定义 $S_n = 1 + \frac{n-1}{n+2} + \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3} + \cdots + \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+3}\cdots\frac{1}{2n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

11.5.2第2组参考题

1. 曲线 K 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta), 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\rho \in C[0,\pi]$, 且已知 K 上任何两点之间的距离不超过 1, 证明: 由曲线 K 与射线 $\theta = 0, \theta = \pi$ 围成的扇形面积 $S = \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{\pi}{4}$. (由此可见, 直径不超过 1 的图形面积最多为 $\frac{\pi}{4}$.)

2. 设 $f \in C[a,b]$, 且处处大于 0. 记 $f_{k,n} = f(a+kh_n)$, $h_n = \frac{b-a}{n}$, $k = 1,2,\cdots,n$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right],$$

并用于证明 (Poisson 积分): $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x = 2\ln r$, 其中 $r > 1$.

3. 设 $f \in C[0,1]$, $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. (1) 证明: $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f(x)|\} \geqslant 3$; (2) 又知 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明: $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f(x)|\} > 10.2$.

4. 设 $f \in C[0,1]$, 如果对某个正整数 $n > 1$, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \int_0^1 x^{n-1}f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

求证: $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f(x)|\} \geqslant 2^n(n+1)$.

5. 求出使不等式 $c_1 \leqslant \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant c_2$ 成立的最佳常数 c_1, c_2, 对其中的积分限分两种情况讨论: (1) $0 \leqslant a < b$; (2) $a < b$.

6. 在命题 11.2.3 (即 Young 不等式) 中的可微条件可以去掉, 此外还可以得到另一个方向的不等式. 设 $f \in C[0,+\infty)$, 严格单调增加, 且 $f(0) = 0$, 及其反函数为 $g(y)$. 对 $a,b > 0$, 证明下列不等式并解释其几何意义: $ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x +$

$\displaystyle\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant bg(b)+ag(a)-f(a)g(b)$, 其中等号成立的充分必要条件是 $b=f(a)$ (即 $a=g(b)$).

7. 设 $f\in C(a,b)$, 证明: (1) 若对任何 $a<x_1<x_2<b$ 成立不等式 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant \dfrac{1}{x_2-x_1}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 f 为下凸函数; (2) 若对任何 $a<x_1<x_2<b$ 成立不等式 $\dfrac{1}{x_2-x_1}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则 f 为下凸函数; (3) 若以上两个不到那个是中的任何一个始终成立等号, 则 f 只能是线性函数. (因此 Hadamard 不等式 (11.7) 中的每个不等式都是 f 下凸的充分必要条件.)

8. 设 $f\in C^1[0,a]$, $f(0)=0$.

(1) 证明: $\displaystyle\int_0^a |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$, 且其中成立等号当且仅当 $f(x)=cx$;

(2) (Opial 不等式) 增加条件 $f(a)=0$, f 在 $(0,a)$ 上大于 0, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{4}\int_0^a|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

9. (Bellman-Gronwall 不等式) 设当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x),g(x)$ 为非负连续函数, 且有 $f(x)\leqslant A+\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $A>0$, 证明: 当 $x\geqslant0$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$f(x)\leqslant A\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

10. 设 $f\in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, f 在 $(0,1)$ 中无零点, 证明: $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$, 且其中 4 是最佳下界.

11. 设 f 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$, 则有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

(这是 Cauchy-Schwarz 不等式的反向不等式, 也称为 Kantorovich (康托罗维奇) 不等式.)

12. 设非常值函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ, 使 $|f'(\xi)|>\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

13. 设 $f \in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=f'(0)=1$, $f'(1)=1$, 证明: $\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4$, 且其中等号车里当且仅当 $f(x)=x^3-x^2$.

14. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上处处大于 0, 且对于 $L>0$ 满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant L|x_1-x_2|$, 又已知对于 $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\alpha, \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\beta,$$

证明以下积分不等式: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

15. 先用微分学或其他方法证明: 当 $0<x<1$ 时, 成立不等式 @跟锦数学微信公众号

$$0<\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

并用 $x=\frac{1}{2n+1}$ 代入, 得到比 (11.34) 更强的不等式. 然后证明比 (11.32) 更为精细的 Stirling 公式, 也就是一般性公式 (11.31) 中 $m=0$ 的情况: @跟锦数学微信公众号

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\theta_n}{12n},$$

或者其等价形式: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0<\theta_n<1$.

第12章广义积分

12.1.3练习题

1. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续, 且积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: $f\equiv 0$.

2. 如果广义积分 $\int_a^b f^2$ 收敛, 则称 f 在 $[a,b]$ 上平方可积, 分无穷限积分与无界积分两种情况讨论广义积分的平方可积性与绝对可积性之间的关系.

3. 设 $f \in C[0,1]$, $f(0^+)=+\infty$, 定义函数 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x)=\min\{f(x),n\}, \quad 0<x\leqslant 1, \quad n\in\mathbb{N}_+.$$

证明: 广义积分 $\int_0^1 f$ 收敛的充分必要条件是存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

4. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ 收敛, 证明: 对任何实数 a, 下列广义积分也收敛: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)f(x+a)|\,\mathrm{d}x$.

5. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$ 都存在且有限. 证明: 对任意实数 a, 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a)-f(x)]\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并求它的值.

6. 找出以下广义积分计算中的错误, 说明理由, 并计算其主值. 在积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$ 中, 又由被积函数是奇函数, 积分区间关于原点对称, 从而所求积分为 0.

12.2.3练习题

1. 讨论下列广义积分的敛散性, 若是收敛, 还要讨论是条件收敛还是绝对收敛:

(1) $\int_0^{+\infty} x\sin^4 x\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_3^{+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x$; (3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^{+\infty} \ln\frac{x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$; (5) $\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]\mathrm{d}x$; (8) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

2. 对于以下含参数的广义积分, 确定出使积分绝对收敛、条件收敛和发散的参数范围:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$; (3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}|\ln x|^p\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$; (5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p\geqslant 0)$; (6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\,\mathrm{d}x$; (8) $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-\mathrm{e})^p(\ln\ln x)^q}$.

3. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为互不相同的实数, $p_1,\cdots,p_n>0$, 讨论广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$$

的敛散性.

4. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 的敛散性.

5. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2x}$ 的敛散性.

6. 求函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|t^2-\frac{1}{t^2}\right|^x\,\mathrm{d}t$ 的定义域.

7. 设 $f'\in C[0,1]$ 且 $f'(x)$ 处处大于 0, 证明: 广义积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 在 $p<2$ 时收敛, $p\geqslant 2$ 时发散.

8. 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f$ 为条件收敛, 证明:

   (1) 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}(|f|\pm f)$ 发散; (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x(|f|+f)}{\int_a^x(|f|-f)}=1$.

9. 设 $f\in C^1[a,+\infty)$ 单调, 且 $f(+\infty)=0$, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)\sin^2x\,\mathrm{d}x$ 收敛.

10. 设 $f,g\in C[a,+\infty)$, $f'(x)$ 非负, $f(+\infty)=0$, 且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

12.3.3练习题

1. 根据例题 12.3.1 的注, (1) 写出命题 10.4.5 在广义积分情况的推广, 并作出证明; (2) 推广该例题, 也就是说当 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上满足什么条件时, 可以利用类似的方法, 或命题 10.4.5 的推广形式, 证明 f 在这个区间上的广义积分等于 0.

2. 计算下列广义积分:

   (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$; (3) $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

   (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ $(n\in\mathbb{N}_+)$; (5) $\displaystyle\int_0^1x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^m\,\mathrm{d}x$ $(n,m\in\mathbb{N}_+)$;

   (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$; (7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\,\mathrm{d}x$.

3. 利用 Euler 积分 (例题 12.3.4) 计算下列积分:

   (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan x\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x\,\mathrm{d}x$;

   (5) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$; (7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x$;

   (8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln|\sin^2x-a^2|\,\mathrm{d}x$ $(a^2\leqslant 1)$.

4. 利用 Froullani 积分 (例题 12.3.5 及其注) 计算下列积分 $(a, b > 0)$:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$; (5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. 利用 Dirichlet 积分 (例题 12.3.6) 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)}\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

6. 利用概率积分 (例题 12.3.7) 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2 - \frac{b^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

7. 设 $a, b > 0$, 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2 + 4ab}\right)\mathrm{d}t$.

12.4.2练习题

1. 设 f 于 $[a, +\infty)$ 上可导, f' 内闭可积, 且广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有有界的导函数且无穷限积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. 举例说明例题 12.4.2 之逆不成立, 也就是说, 当函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 且满足条件 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ 时, 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 仍可能发散.

4. 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $xf(x)$ 单调, 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

5. 设函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上可微且无穷限积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: 存在数列 $\{x_n\}$, 使 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

6. (1) 设 $f\in C[a,+\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$, 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_nf(x_n)=0$;

(2) 证明在 $f\in C[a,+\infty)$, 且 f 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分为条件收敛时有与 (1) 相同的结论.

(3) 问: 在 f 不满足连续条件时结论是否成立? 根据 f 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分为绝对收敛和条件收敛分别讨论.

12.5.2第1组参考题

1. 证明: 对于任何实数 α, 成立恒等式 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, 并计算以下积分: (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^6)}$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{100}x}$.

2. 证明 (或改进) 对以下广义积分的估计:

(1) $\frac{1}{29}<\int_1^{+\infty}\frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{29}+\frac{1}{59}$; (2) $\frac{\pi}{10}<\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}}<\frac{\pi}{8}$;

(3) $\frac{1}{30}<\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}\,\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{20}$; (4) $0.0099<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x<0.01$.

3. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, $p\geqslant 1$, 且 $|f|^p$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x=0.$$

4. 设 f,g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, $p>1$, 且 $|f|^p,|g|^{\frac{p}{p-1}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 证明: 函数 $I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)g(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

5. 设 $f\in C^1[a,+\infty)$, 单调减少, 且 $f(+\infty)=0$, 证明: 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是 $\int_a^{+\infty}xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上为内闭可积的正函数, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p$, 则当 $-\infty\leqslant p<-1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $-1<p\leqslant+\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

7. 证明: $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\gamma$, 其中 γ 是 Euler 常数 (见 2.5.3 小节).

8. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性.

9. 讨论以下带有参数的广义积分的敛散性, 确定使得积分绝对收敛、条件收敛和发散的参数范围:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\ (p,q,r>0)$; (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$.

10. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin px\,\mathrm{d}x$ 在 $p>0$ 时收敛, 证明: $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty}f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0$.

11. 设 $f\in C[0,+\infty)$, 广义积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对可积, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

12. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

13. 在常义积分的第二中值定理的基础上, 证明广义积分第二中值定理: 设广义积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 (奇点为 a 或 b, 或者 a 和 b 都是奇点), 如果 f 在 (a,b) 上单调有界, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(a^+)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x+f(b^-)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

14. 设广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $\int_1^{+\infty}x^{-1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$.

15. 设 $a>0$, f 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积, 证明: 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

16. 在 $x>0$ 时定义特殊函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 证明: (1) $\Gamma(x)<+\infty,\forall\ x>0$; (2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$; (3) $\Gamma(1)=1,\Gamma(n+1)=n!,\forall\ n\in\mathbb{N}_+$; (4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. (从 (3) 可见 $\Gamma(x)$ 是阶乘 $n!$ 的连续化. 这在一定条件下是唯一的, 见下册 §23.3 对 $\Gamma(x)$ 的介绍和命题 23.3.1, 或参见 [14,55].)

12.5.2第2组参考题

1. 先证明不等式 (12.8), 然后由 $\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ 出发, 用夹逼方法计算概率积分.

2. (Gordon 不等式) 证明: 函数 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$ 在 $x > 0$ 时严格单调减少, 且成立 $\frac{x}{x^2+1} < f(x) < \frac{1}{x}$.

3. 设 $f \in C[0,+\infty)$ 且平方可积, 令 $g(x) = \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$, 证明: $\frac{g(x)}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上平方可积, 且成立 $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x \leqslant 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) \,\mathrm{d}x$.

4. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可微, f 和 f 在这个区间上均平方可积, 证明: f' 在这个区间上也平方可积.

5. 设 $f \in C^1[0,+\infty)$, 且 $xf(x)$ 和 $f'(x)$ 在这个区间上均平方可积, 证明: (1) f 也在这个区间上平方可积; (2) 成立不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{+\infty} f^2(x) \,\mathrm{d}x \leqslant 2 \left(\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x) \,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}};$$

(3) 在上述不等式中成立等号的充分必要条件是 $f(x) = a\mathrm{e}^{-bx^2}$, 其中 $b > 0$.

6. 问 a, b 是怎样的正实数时, 广义积分 @跟锦数学微信公众号

$$\int_b^{+\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) \mathrm{d}x$$

是收敛的?

7. 设有理函数 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_k A_k$, 其中 A_k 是有理函数 f 的部分分式分解中 $\frac{1}{x_k}$ 的系数, x_k 是分母 $Q(x)$ 的零点, 和式只对虚部大于 0 的 x_k 求和. 当 x_k 为单根时, 有简单公式 $A_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}$.

8. 应用上题的结果于下列各小题: (1) 证明: 对 $n \in \mathbb{N}_+$ 成立 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\pi}{2n}$;

(2) 证明: 若 $n, m \in \mathbb{N}_+$ 满足条件 $2m+1<2n$, 则成立 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \csc \frac{(2m+1)\pi}{2n}$;

(3) 计算积分: (a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{50}}{x^{100}+1} \mathrm{d}x$; (b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{30}+1}{x^{60}+1} \mathrm{d}x$.

9. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的非负函数, 且满足以下条件: @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明: (1) 当 $x>0$ 时, 成立 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^2}{1+x^2}$; (2) 当 $x<0$ 时, 成立 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+x^2}$.

10. 设 $p>0$, 定义 $g(x) = \begin{cases} p\left[\frac{x}{p}\right] + \frac{p}{2}, & x \geqslant 0, \\ -g(-x), & x<0. \end{cases}$ 证明: 对所有 x, 成立 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\left[\frac{x}{p}\right]}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt} \cdot \frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[g(x^+) - g(x^-)].$$

原书第2册勘误

1. Page 175, Line 2, $f_x(0,0), f_y(0,0) \to f_x(x,y), f_y(x,y)$.
2. Page 175, T 8, $\Omega \in \mathbb{R}^2 \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
3. Page 207, T 10, 应加条件: $r \geqslant 2, \exists\ 1 \leqslant i,j \leqslant r$, s.t. $f(x_i) \neq f(x_j)$. 如果没加这条件而做出, 那肯定是错误的!
4. Page 207, T 1, $f(x_0) \to f(x_0)$.
5. Page 214, T 4, l_i 应位于 $S^2 = \left\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2=1\right\}$ 的大圆上, 且夹角为有向角.
6. Page 278, T 5, $\frac{4a^2}{\pi} \to 2a^2$.
7. Page 290, T 1 (11), $(x-1)(x-2) \to |x-1| \cdot |x-2|$.
8. Page 397, T 8, $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi \to \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

暂未做的题目

15.3.2 参考题 **11, 16, 17, 18, 20.**

16.3.6 练习题 **2 8.**

16.5.2 参考题 **3 17.**

17.3.2 第1组参考题 **1 6. (1 5** 可见熊金城的点集拓扑讲义哦.)

20.5.2 第2组参考题.

21.4.4 练习题 **1 26.**

21.6.2 第1组参考题 **9, 11, 12.**

21.6.2 第2组参考题 **4, 5, 7, 8.**

22.1.3 思考题.

22.4.4 练习题 **2.**

22.5.4 练习题 **2(1), 4,5,6.**

22.6.2 第1组参考题 **1,2,4,8.**

22.6.2 第2组参考题 **4,6.**

23.2.3 练习题 **1(8),(9).**

23.2.6 练习题 **6, 8(3), 9(2), 10.**

第13章数项级数

13.1.2思考题

这一小节的思考题主要用于对级数定义进行复习, 对于其中的是非题, 若回答"是", 则要作出证明, 若回答"不是", 则要举出反例.

1. (例题 13.1.2 之续) 设比赛开始时, 乌龟在 Achilles 之前 1000 m, Achilles 的速度为 10 m/s, 乌龟的爬行速度为 0.1 m/s. 试将 Zeno 悖论中的论点转化为无穷级数求和问题, 并计算出 Achilles 赶上乌龟所需要的时间. (本题表明: 有了无穷级数的工具之后, Zeno 的这个悖论就不再是悖论了.)

2. 设级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均收敛 (或发散), 讨论下列级数的敛散性: $\sum(a_n \pm b_n)$, $\sum a_n b_n$, $\sum \dfrac{a_n}{b_n}$ $(b_n \neq 0)$, 又对于 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 均为正项级数情况讨论同样的问题.

3. 对于级数 $\sum \max\{a_n, b_n\}$, $\sum \min\{a_n, b_n\}$ 继续上题的讨论.

4. 如果级数 $\sum(a_n+a_{n+1})$ 收敛, 是否必可推出 $\sum a_n$ 收敛? 在 $\sum a_n$ 是正项级数时, 答案又是什么?

5. 记 $S=1-1+1-1+\cdots$, 并作以下计算: $S=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-S\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}$, 问: 其中有何错误? 又可在阅读第二组参考题 18 后再做此题.

6. 讨论级数 $a_1-a_1+a_2-a_2+\cdots+a_n-a_n+\cdots$ 的敛散性.

7. 如果对每个正整数 p成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$, 问: 是否能由此推出级数 $\sum a_n$ 一定收敛?

8. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 若已知级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同时收敛 (或发散), 问: 能否推出级数 $\sum c_n$ 收敛 (或发散)? 并请将你的结论与数列的夹逼定理见上册 20 页) 作比较.

9. 设 $\sum a_n$ 收敛于和 S, 若对每个 n 将 a_{2n-1} 和 a_{2n} 两项作交换, 证明所得的新级数收敛, 并求其和.

10. 设有收敛正项级数 $\sum a_n$, 且对于每个正整数 n 成立 $a_n\leqslant R_n$, 其中 R_n 为第 n 个余项, 证明: $\sum a_n$ 实际上是有限和.

13.2.5练习题

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的通项为等价量: $a_n\sim b_n$, 又记两个级数的部分和为 S_n 和 S'_n, 余项为 R_n 和 R'_n, $n=1,2,\cdots$, 证明: (1) 若两个级数均收敛, 则 $R_n\sim R'_n$; (2) 若两个级数均发散, 则 $S_n\sim S'_n$.

2. 设 $\sum a_n$ 为正项级数, 证明: 任意改变其中各项的顺序和加括号后得到的基数与原来大家数具有相同的敛散性, 且在收敛时级数的和不变. (这表明, 如果无限项求和时每项为非负数, 或至多只有有限项为负数, 则有限项求和时的结合律和交换律对无现象求和都依然成立.)

3. 讨论下列各级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$;
(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}{n^p}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\dfrac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ $(a,b,c>0)$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^{n}$.

4. 从例题 13.2.6 和 13.2.7 知道, 若从收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 作出 $\{u_n\}$, 其中 u_n 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的调和平均值或几何平均值, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 但是若 u_n 为算术平均值, 则情况大不一样. 证明: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则除了一种特殊情形之外, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 必定发散.

5. 试用 Sapagof 判别法 (即命题 13.2.3) 或其他方法证明下列数列收敛于 0: (1) $\left\{\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right\}$; (2) $\left\{\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}\right\}$; (3) $\left\{\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right\}$ $(x>0)$.

6. 举出一个收敛的正项级数 $\sum a_n$ 的例子, 使它满足条件 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

7. 已知正项级数 $\sum a_n$ 收敛, $p>1$, 证明: 级数 $\sum a_n^p$ 一定收敛. 又若去掉 $\sum a_n$ 为正项级数的条件, 结论是否还成立?

8. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于 0, 且 $b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\geqslant 0, k=1,2,\cdots$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛, 且其和为 a_1.

9. 设对于每个正整数 n 都有 $0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

10. 设 $x>0$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 收敛.

11. 设 $x>0$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$ 的敛散性.

12. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 证明: (1) 若在 Raabe 判别法中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 存在, 则在对数判别法 (13.15) 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}$ 也存在, 且极限值相同; (2) 若在 Bertrand 判别法中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]$ 存在, 则在对数判别法 (13.16) 中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{na_n}}{\ln\ln n}$ 也存在, 且极限值相同.

13. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, k 为一正整数, 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+k}}{a_n}=l$, 证明: $l<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $l>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (本题如取 $k=1$, 就是 d'Alembert 判别法. 因此本题可看作为 d'Alembert 判别法的一个推广.)

14. (Dini (迪尼)) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 其余项 $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, n=1,2,\cdots$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散, 但对任意 $p>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}$ 收敛.

15. 设 $0<a_1<\frac{\pi}{2}$, 然后用迭代公式 $a_n=\sin a_{n-1}$ 生成数列 $\{a_n\}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 的敛散性. (参考上册 233 页的例题 8.1.10.)

13.3.4练习题

1. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 n}{n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$;
(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\right]^p$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$; (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$; (10) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$;
(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$.

2. 将调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的各项改变符号, 其规则是每 p 个正项后为 q 个负项, 然后再如此重复, 但不改变各项原有的顺序. 证明: 所得级数当且仅当 $p=q$ 时收敛.

3. 设 $0<\alpha<1$, 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ 按照每 p 个正项后为 q 个负项的规则进行重排, 但保持正项和负项之间的原有顺序, 证明: 重排后的基数当且仅当 $p=q$ 时收敛.

4. 设 $p,q>0$, 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $1-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$.

5. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^n}$ (若分母为零则去掉该项) 的条件收敛性和绝对收敛性.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 严格减少且趋于零, 证明下列级数收敛: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

7. 证明下列级数收敛: $1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$.

8. (Du Bois-Reymond 判别法) 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

9. (Dedekind 判别法) 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

10. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$ 也发散.

11. 证明: 当 $|q|<1$ 时, 成立 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$.

12. 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 与自身的 Cauchy 乘积实数发散级数.

13. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$, 证明: $2S(x)C(x)=S(2x)$.

14. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n},\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$ 均收敛, 又对每个 n 有 $b_n(a_n+b_n)\neq 0$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$ 收敛.

15. 两个发散级数的 Cauchy 乘积可以是收敛的. 试验证下列两个发散级数 @跟锦数学微信公众号

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}, 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的 Cauchy 乘积是绝对收敛级数.

16. (1) 举例说明收敛级数与发散级数的乘积既可能收敛, 也可能发散. (2) 证明: 对于正项收敛级数和正项发散级数, 其乘积一定发散 (假定其中的正项收敛级数的和大于 0).

13.4.3练习题

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性: (1) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$; (2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n+1})$; (3) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$; (4) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{p}$; (5) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^{n}\frac{1}{n}\right]$; (6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$.

2. 设 $a,b>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 的每一项满足条件 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛的充分必要条件是无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 收敛.

4. 如果对正数数列 $\{a_n\}$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>0$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

5. 讨论无穷乘积 $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的敛散性, 其中 α,β,γ 为参数, 且设 n_0 已足够大, 使得乘积中出现的所有因子均大于 0.

6. (Euler) 对于 $0<x<1$, 证明:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

7. (Stirling) 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$ 于某个 x 值收敛, 则级数对任何 x 值都收敛. [题目待修改]

8. (Landau (兰道)) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ $(x \neq 0,-1,-2,\cdots)$ 与 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 对同样的 x 值收敛. [题目待修改]

9. 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{1}{n}+O(b_n)$, 并已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10. (Stirling 公式的又一证明) 用无穷乘积方法证明: 数列 $\left\{\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$ 有非零极限, 并求出此极限.

13.5.2第1组参考题

1. 试用两种方法证明: 对于正数数列 $\{a_n\}$, 必有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = 0$.

2. (Abel-Pringsheim (普林斯海姆) 定理) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少, 且已知级数收敛, 证明: $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. (举例说明, 若通项非单调, 则结论不成立.)

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少, 又已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调减少收敛于 0. (1) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 同敛散, 且在收敛时具有相同的和. (2) 对于通项不是单调减少的情况, 试举例说明上述“同敛散”的结论不再成立.

5. 由于数列 $\{a_n\}$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 具有相同的敛散性, 试用级数理论讨论下列数列的敛散性: (1) $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n, n = 1,2,\cdots$; (2)

$a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, n=1,2,\cdots$; (3) $a_n=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}-\ln\ln n, n=2,3,\cdots$.

6. 证明: (1) 若 f 是 $[1,+\infty)$ 上的非负单调减少函数, 则存在极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)=A,$$

且 $0\leqslant A\leqslant f(1)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}=\frac{\pi}{2}$.

7. 若函数 f 在 $[-1,1]$ 上定义, 且存在 $f''(0)$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛的充分必要条件是 $f(0)=f'(0)=0$.

8. 设函数 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加且有极限 $f(+\infty)=A$. 证明: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛, 并求其和; (2) 又若 f 在 $[1,+\infty)$ 上二次可微, 且 $f''(x)<0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$ 也收敛.

9. (二重正项级数的求和顺序交换定理) 设对每个正整数 n, 正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n,k}$ 收敛, 且其和为 a_n. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}.$$

10. 对正整数 $m\geqslant 2$, 用 s_m 表示级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}$ 的和, 证明: $\sum\limits_{m=2}^{\infty}s_m=1$.

11. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项单调减少趋于 0, 且已知数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\right\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

12. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且数列 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格单调减少, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty.$$

13. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{na_n\}$ 单调, 证明: $\lim_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

14. 设 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. (Fibonacci 数列的倒数所成级数收敛.)

15. 设 $0 < p < 1$, $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^p}, n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

16. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则对于 $p > \frac{1}{2}$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛. 举例说明 $p = \frac{1}{2}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\frac{1}{2}}}$ 可能发散.

17. 证明下列两个级数发散: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

18. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2}$.

19. 设有收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 证明: (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$ 收敛, 且其和也是 S.

20. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ 为条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = t$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排. 若 $t \neq s$, 证明: 对于任意 N, 存在 n, 使得 $|n - f(n)| > N$. (这表明, 对于条件收敛级数作重排时, 如果每一项的新位置与原有位置之差不超过某个界限的话, 则级数的和不会改变.)

13.5.2第2组参考题

1. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$ 收敛.

2. 设 $a>0, a_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(a+a_1+\cdots+a_n)^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 且其和 $S\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且存在 $M>0$, 使得对每个正整数 n 成立 $a_k\leqslant Ma_n, n\leqslant k\leqslant 2n$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

4. 试构造两个发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 它们的通项都单调减少, 但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$$

收敛.

5. (Frink (弗林克) 判别法) 设对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lambda$, 则当 $\lambda<\mathrm{e}^{-1}$ 时级数收敛, 而当 $\lambda>\mathrm{e}^{-1}$ 时级数发散.

6. (Ermakov (叶尔马科夫) 判别法) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少且大于 0, 又知存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^xf(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=p$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 当 $p<1$ 时收敛, 而当 $p>1$ 时发散.

7. (Lobachevski (罗巴切夫斯基) 判别法) 通项单调趋于 0 的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n2^{-n}$ 同敛散, 其中 $b_n=\max\left\{k; a_k\geqslant 2^{-n}\right\}$.

8. 证明: 下列两个无穷乘积收敛于自然对数的底 e: (1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$, 其中 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1), \forall\ n\geqslant 2$; (2) $2\left(\dfrac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$.

9. 证明: 若 $p\leqslant 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\ln n)}{n^p}$ 发散.

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛, 证明:

(1) 对任一正整数 k, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n+k}=0$.

11. 若对每一个满足 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 的数列 $\{b_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

12. 若对每一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ 必定收敛.

13. 举出一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

14. 设函数 f 在 $[1, +\infty)$ 上连续可微, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: 广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同敛散.

15. 设 $p > 0$, 证明: 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的和 S 满足估计式 $\dfrac{1}{2} < S < 1$.

16. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 又知 $\{b_n\}$ 单调减少收敛于 0, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) b_n = 0$.

17. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛, 其中 $p > 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^p} = 0$.

18. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 并令 $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}, n = 1, 2, \cdots$. 定义: 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 CeSáro (切萨罗) 求和 (或称级数在 CeSáro 意义下上可求和), 并将极限值 σ 称为级数的 CeSáro 和. 证明: 收敛级数一定可以 CeSáro 求和, 且其 CeSáro 和和与收敛级数在通常意义下的和相等, 但反之不真.

19. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 CeSáro 求和的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$. (这个条件比通常意义下级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时通项为无穷小量的必要条件弱得多.)

20. 下列级数是否可以 Cesáro 求和? 如果可以, 试求出它们的 Cesáro 和. (1) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; (2) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$; (3) $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \cdots$; (4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots$.

21. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项满足 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 证明: 该级数在通常意义下收敛的充分必要条件是级数可以 Cesáro 求和.

22. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesáro 求和, 证明: 该级数在通常意义下收敛的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = 0$.

第14章函数项级数与幂级数

14.1.3练习题

1. 讨论函数列或函数项级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $S_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, n = 1, 2, \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$.

(2) $S_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, n = 1, 2, \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$.

(3) $S_n(x) = \dfrac{n+x^2}{nx}, n = 1, 2, \cdots, x \in (0, +\infty)$.

(4) $S_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}, n = 1, 2, \cdots$.

(i) $x \in (0, 1)$,

(ii) $x \in (0, +\infty)$.

(5) $S_n(x) = n\sin\dfrac{x}{n}, n = 1, 2, \cdots$.

(i) $x \in [0, a]$,

(ii) $x \in (0, +\infty)$.

(6) $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{-nx}), n = 1, 2, \cdots$.

(i) $x \geqslant 0$,

(ii) $x < 0$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^8}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), n = 1, 2, \cdots, \dfrac{1}{t} \leqslant |x| \leqslant t, t > 1$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}, x > 0$.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left[\mathrm{e}^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right]$.

(i) 有限闭区间 $[0, b]$,

(ii) $[0, +\infty)$.

2. 确定函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的收敛域与一致收敛域.

3. 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛且一致收敛, 但不绝对一致收敛.

4. 证明: 函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在区间 $(-a, a)$ 上一致收敛, 其中 a 是小于 $2\ln^2 2$ 的任意固定正数.

5. 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上处处收敛, 但不一致收敛.

6. 证明: 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \sin \pi t \,\mathrm{d}t$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

7. 设 $\{f_n\}$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数列, 且该函数列在 (a, b) 上一致收敛, 证明: $\{f_n\}$ 在点 a 和 b 都收敛, 且在 $[a, b]$ 上一致收敛.

8. 设 f 在 (a, b) 上有连续导函数, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$F_n(x) = \frac{n}{2}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right], x \in (a, b), n = 1, 2, \cdots.$$

证明: 函数列 $\{F_n\}$ 在 (a, b) 上处处收敛且内闭一致收敛.

9. 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 中的函数在 $[a, b]$ 上同为单调增加函数或单调减少函数, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 都绝对收敛, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

10. 设在区间 $[a, b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于极限函数 f, 且已知 f 在 $[a, b]$ 上巫零点, 证明: 函数列 $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

11. 设函数列 $\{f_n\}$ 于区间 I 上一致收敛, 又设每个 f_n 于 I 上有界, 证明: 函数列 $\{f_n\}$ 于 I 上一致有界.

12. 设函数列 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 分别在区间 I 上一致收敛. 如果每个 f_n 和 g_n 在 I 上有界. 证明: 函数列 $\{f_n \cdot g_n\}$ 在 I 上一致收敛.

13. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$, 定义函数列 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right),n=1,2,\cdots$, 证明: 函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

14. 设 $S_1(x)\in R[a,b]$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$S_{n+1}(x)=\int_a^x S_n(t)\,\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

证明: 函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

14.2.1命题14.2.2

命题 14.2.2 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上收敛于函数 $S(x)$, 又设对每个正整数 n, 极限 $\lim_{x\to x_0}S_n(x)$ 存在且有限, 而且这个极限过程对 n 一致, 则 $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0}S(x)$ 都存在且两者相等, 即有 (14.3) 成立.

14.2.4练习题

1. 计算 $\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

2. 确定函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 的定义域, 并讨论其连续性与可微性.

3. 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 在任意有界闭区间上一致收敛, 并且它的和函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.

4. 设 $\{S_n(x)\}$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续的函数列, 且已知它在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于函数 $S(x)$. 证明: 函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

5. 设连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 且 $\forall\ \varepsilon\in(0,b-a)$, $\{f_n\}$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上一致收敛. 如果存在 $g\in R[a,b]$, 使 @跟锦数学微信公众号

$$|f_n(x)|\leqslant g(x),x\in[a,b],n=1,2,\cdots,$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. 设函数列 $\{f_n\}$ 于点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中收敛于函数 f, 又设每个 f_n 于点 x_0 连续. 证明: f 在点 x_0 连续的充分必要条件是 $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0, \exists\ N$, 使得对于每个 $x\in O_\delta(x_0)$, 成立 $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.

7. 设函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于函数 $f\in C[a,b]$, 证明: $\{f_n\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是对于 $[a,b]$ 中的每个收敛数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

8. 设可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 且已知每个 f_n 在 $[a,b]$ 上有原函数, 证明: f 在 $[a,b]$ 上也有原函数.

14.3.2思考题

1. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 a,b 两点收敛 $(a<b)$, 问级数在 $[a,b]$ 上的收敛、绝对收敛和一致收敛的情况如何?

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$ 的收敛半径.

3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径是 R, 且在 (x_0-R,x_0+R) 上一致收敛, 问该级数在 $x=x_0\pm R$ 处的敛散性怎样?

4. 问:是否可以用 Weierstrass 判别法 (即优级数判别法) 证明 Abel 第二定理 (即命题 14.3.2)?

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$, 试问:

(1) 是否成立 $\displaystyle\int_0^R\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$?

(2) 如果上式右边的基数收敛, 上式是否成立?

6. 已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 问 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径是多少?

7. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$, 和函数为 $S(x)$. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 能否推出极限 $\lim_{x\to 1^-} S(x)$ 不存在? (试考虑 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 则答案如何?

14.3.4练习题

1. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n+2^n+\cdots+k^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域, 其中 $k>1$ 为整数.

2. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 试求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} x^n$ $(a>0)$ 的收敛半径.

4. 对任意正整数 k, 证明: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ 的收敛半径为 k^k, 收敛域为 $(-k^k, k^k)$.

5. 求下列幂级数 (或广义幂级数) 的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+(-b)^n}{n} x^n,\ a, b>0$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}} x^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^2} x^{n^3}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3n}\left(x^2+x+1\right)^n$;

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$.

6. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n^2-1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+2}-1\right)x^{2n}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$.

7. 证明: $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}x^{4n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足微分方程 $u^{(4)}=u$.

8. 证明: Bessel (贝塞尔) 函数 $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}$ 满足微分方程

$$xu''+u'+xu=0.$$

9. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(1+n)}x^n$, 证明:

(1) 函数 $S\in C[-1,1]$;

(2) $S_+'(-1)$ 有限, 而 $S_-'(1)=+\infty$.

10. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$, 证明: 函数 f 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上可导, 并讨论 f 在 $\frac{1}{2}$ 处的可导性.

11. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

12. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$, 将级数的部分和函数列记为 $\{S_n\}$ 将和函数记为 S, 证明: 函数列 $\{S\circ S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $S\circ S$.

13. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 记 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, $n=0,1,\cdots$. 证明:

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ 有相同的收敛半径;

(2) 若 $a_n\geqslant 0, n=0,1,\cdots$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

14.4.4练习题

1. 将函数 $f(x)=\frac{1}{a-x}(a\neq 0)$ 分别按 $x, x-b, \frac{1}{x}$ 的乘幂展开.

2. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开为 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂函数.

3. 设函数 f 在区间 $(-a,a)$ $(a>0)$ 上无限次可微, 且导函数序列 $\left\{f^{(n)}\right\}$ 在 $(-a,a)$ 上一致有界, 证明: f 在 $(-a,a)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数.

4. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 并且其导函数列在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致有界. 如果存在正数数列 $\{x_n\}$, 使 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ 且 $f(x_n)=0, n=1,2,\cdots$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

5. 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并确定其成立范围:

(1) $\sqrt{4-x}$;

(2) $a^x, a>0$;

(3) $\ln(1+3x+2x^2)$;

(4) $\arctan\frac{2x}{1-x^2}$;

(5) $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$;

(6) $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x^2}$;

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$;

(8) $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$.

6. 将下列函数在指定点展开为幂级数:

(1) $\dfrac{1}{3+x}, x=2$;

(2) $\ln\dfrac{1}{3+2x+x^2}, x=-1$;

(3) $\ln x, x=3$;

(4) $\dfrac{x-1}{x+1}, x=1$;

(5) $\sin x, x=\dfrac{\pi}{6}$.

14.5.2第1组参考题

1. 试举例: 在 $[0,1]$ 上一致收敛于连续函数的函数列 $\{S_n(x)\}$, 但每个 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续.

2. 用逐项求导方法写出函数 $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的任意阶导数的表达式, 并证明运算的合理性.

3. 证明 Dirichlet 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 的收敛性具有以下特性: 若存在 x_1,x_2, 使 $x=x_1$ 时级数发散, 而当 $x=x_2$ 时级数收敛, 则一定存在 $r\in(-\infty,+\infty)$, 使 $x<r$ 时级数发散, 当 $x>r$ 时级数收敛.

4. 设 $f\in C[0,1]$, 定义函数列 $S_n(x)=x^nf(x), x\in[0,1], n=1,2,\cdots$, 证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛的充分必要条件是 $f(1)=0$.

5. 设数列 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 区间内的所有有理点的一个排列, 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}, x\in[0,1]$$

具有

(1) 处处连续;

(2) 在 $[0,1]$ 上对每个无理点处可微, 而在每个有理点处不可微.

6. 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上无穷次可微且不恒等于 0, $f^{(n)}(0)=0, n=0,1,\cdots$. 如果函数列 $\left\{a_n f^{(n)}\right\}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 0, 其中 $\{a_n\}$ 为一给定的数列, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n=0$.

7. 用幂级数方法证明级数乘积的一个基本结果 (即命题 13.3.7): 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛, 且分别以 A,B,C 为和, 则 $C=AB$.

8. 求下列函数的 Maclaurin 展开式:

(1) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(2) $\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$ (函数在点 $x=0$ 处用极限值定义).

9. 设数列 $\{a_n\}$ 有极限 L, 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=L$.

10. 设多项式序列 $\{P_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 P, 证明: P 也是多项式.

11. 上设 $\{P_n\}$ 是次数不超过 D 的多项式序列, 证明: 若该序列于区间 $[0,1]$ 上收敛, 则也一定一致收敛.

12. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 Maclaurin 级数展开式, 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充分比必要条件是 f 为多项式.

13. 设 $C(a)$ 为 $(1+x)^a$ 的 Maclaurin 级数展开式中 x^{2003} 项的系数, 计算积分

$$\int_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+2003}\right)\mathrm{d}y.$$

14. 求级数和 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m^2 n}{3^m(n3^m+m3^n)}$.

15. 甲乙两人投骰子, 两人依次轮流投掷并且由甲掷第一次, 问第一个六点由甲掷出的概率是多少?

16. 某侨商给母校设立奖学基金. 该基金存入银行, 每年可以得到 $a\%$ 的利息. 奖学金按如下数目发放: 基金存入银行当日发放一万元, 第二年同一天发放二万元, 以后每年同一日发放, 发放金额必前一年多一万元. 要使这笔奖学金能够永远按此规律发放下去, 该侨商至少应捐资多少元?

14.5.2第2组参考题

1. 设 $\{f_n\}$ 是在 $[a,b]$ 上的可积函数列, 且于 $[a,b]$ 上一致有界, 若已知 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 证明: 积分值所成的数列必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

2. 若在 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于极限函数 f, 证明: $f\in R[a,b]$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 设具有相同单调性的单调函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $f\in C[a,b]$, 则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 并已知对于每个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 单调增加收敛于 $f(x)$. 证明: f 必有最小值. 又问: 若将最小值换为最大值, 或将 $[a,b]$ 换为 (a,b), 则结论如何?

5. 设 $\{f_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数列, 且存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 使 $f_n(x_n)=x_n, n=1,2,\cdots$. 如果导函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 证明:

(1) 函数列 $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2) 设 $\{f_{n_k}\}$ 的极限函数为 f, 则存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$;

(3) f 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且在 $[a,b]$ 上 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)$.

6. 设在区间 $[a,b]$ 上的连续函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的通项之间满足条件

$$|u_n(x)|\leqslant v_n(x), n=1,2,\cdots,$$

又设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上连续, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数也在 $[a,b]$ 上连续.

7. 证明: 对任意 n 和 x 成立不等式 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 2\sqrt{\pi}$.

8. 利用幂级数展开证明 (上册 374 页的题 15) 不等式: @跟锦数学微信公众号

$$0<\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)},0<x<1.$$

9. 利用幂级数展开证明: 对一切 $n\in\mathbb{N}_+$ 和实数 x 成立不等式: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\leqslant \mathrm{e}^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n<\frac{x^2\mathrm{e}^{|x|}}{2n}.$$

10. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的部分和数列为 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n,\sigma_n=(S_0+S_1+\cdots+S_{n-1})/n,n=0,1,\cdots$, 且有极限 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S$, 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的 Cesáro 和为 S (参见 39 页上第十三章末的几个参考题), 证明:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛;

(2) 在 $(-1,1)$ 上成立 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$;

(3) 记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in(-1,1)$, 则有 $\lim_{x\to1^-}S(x)=S$.

11. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为正数数列, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 且在 $x=1$ 处发散. 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=A$, 证明: $\lim_{x\to1^-}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}=A$.

12. 证明:如果正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=A$, 则 $\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)=A$. (本题为上题之特例, 但也可以用其他方法做.)

13. 设 f 在区间 $[0,r]$ 上无限次可微, 且 f 及其所有导函数都是非负的, 证明: f 的 Maclaurin 级数展开式在 $[0,r)$ 上成立: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

14. (生成函数法) 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列: $a_0=a_1=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\forall\, n\geqslant 2$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为 $\{a_n\}$ 的生成函数. 试求出 f, 并由此求出 $\{a_n\}$ 的解析表达式, 同时求出该级数的增长数: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (参考上册 48 页).

15. 利用上题的生成函数方法证明组合学中的 Vandermonde (范德蒙德) 恒等式: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n},$$

并由此推出 $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

第15章Fourier级数

15.1.5练习题

1. 求下列函数的 Fourier 系数:

(1) $\sin^3 x+\cos^4 x$;

(2) $ax^3+bx^2+cx+d, x\in(-\pi,\pi)$.

2. 将定义在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的可积和绝对可积函数 f 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 上, 使其 Fourier 级数具有如下的形式: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

3. 证明: $f(x)=\begin{cases}c, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\\ -c, & -\pi<x<0\end{cases}$ 的 Fourier 级数的前 $2n-1$ 项的和 $S_{2n-1}=\sum\limits_{k=1}^{2n-1}b_k\sin kx$ 具有形式 @跟锦数学微信公众号

$$S_{2n-1}(x)=\frac{2c}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

4. 设 $f\in C^1[-\pi,\pi]$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right), b_n=O\left(\frac{1}{n}\right);$$

如果又有 $f(\pi)=f(-\pi)$, 则 $b_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

5. 设 f 是以 2π 为周期的有界函数且在 $(-\pi,\pi)$ 上逐段单调, 证明:

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right), b_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(可在每个单调区间上用积分第二中值定理 (见上侧的命题 10.2.2).)

6. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 证明: 用 $\sin x$ 去乘 f 的 Fourier 级数的每一项所得的三角级数就是 $f(x)\sin x$ 的 Fourier 级数.

7. 设 $[a,b]$ 上的连续函数系 $\{e_n\}$ 满足条件 $\int_a^b e_i(x)e_j(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{ij}$, 其中 $\delta_{ij}=0, \forall\ i\neq j; \delta_{ii}=1$, 则称该函数系在 $[a,b]$ 上为规范正交系. 设 f 在 $[a,b]$ 上的可积和平方可积, 定义 $c_n=\int_a^b f(x)e_n(x)\,\mathrm{d}x$ 为 f 关于 e_n 的 Fourier 系数, $n=1,2,\cdots$. 证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$ 收敛. 又问: 当 n 固定时, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 取什么值时, 平方平均误差

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

最小?

8. 设 g 是周期为 1 的连续函数且 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 函数 $f\in C^1[0,1]$, 令

$$a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots,$$

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

15.2.7练习题

1. 定义函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ \frac{\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2}, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).\end{cases}$ 将 f 展开为余弦级数, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的值.

2. 设对于 $a>0$ 有函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left[0,\dfrac{a}{2}\right],\\ a-x, & x\in\left(\dfrac{a}{2},a\right],\end{cases}$ 将 f 展开为:

(1) 余弦级数,

(2) 正弦级数.

3. 设 α 为非整数, 利用 $f(x)=\cos\alpha x, x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 展开式, 证明下列关于余切函数和余割函数的部分分式展开式: @跟锦数学微信公众号

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},$$
$$\csc x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},$$

且求出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}$ 的和.

4. 求下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为 Fourier 级数:

(1) $f(x)=|\sin x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases} ax, & x\in[-\pi,0),\\ bx, & x\in[0,\pi].\end{cases}$

5. 将下列函数展开为正弦级数:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}, x\in[0,\pi]$;

(2) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

6. 将下列函数展开为余弦级数:

(1) $f(x)=x(\pi-x), x\in[0,\pi]$;

(2) $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right),\\ 1, & x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \pi-x, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\\ -\pi-x, & -\pi<x<0.\end{cases}$

(1) 求 f 的 Fourier 展开式;

(2) 讨论 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi,\pi]$ 上是否收敛于 f, 是否一致收敛?

8. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积, 证明: $\forall\ \varepsilon>0$, 存在三角多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$, 使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-P_n(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

9. 设 f 为周期 2π 的连续函数, 且已知

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

证明: 若右边的级数一致收敛, 则其和函数一定就是 f.

10. 设 $0<a<\pi$, 定义函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 0, & a\leqslant|x|<\pi.\end{cases}$ 利用 f 的 Parseval 等式, 求下列级数的和: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 na}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 na}{n^2}$.

15.3.2参考题

1. 设 f 是以 2π 为周期的函数且在 $(0,2\pi)$ 上可积和绝对可积, 证明:

(1) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上单调减少, 则 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0, n=1,2,\cdots$;

(2) 设 f 在 $(0,2\pi)$ 可导且 f' 在 $(0,2\pi)$ 上可积和绝对可积, 如果 f' 在 $(0,2\pi)$ 上单调增加, 则 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0, n=1,2,\cdots$.

2. 设 f 为区间 $[0,2\pi]$ 上的下凸函数, 证明: $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\geqslant 0,\forall\ n\geqslant 1$.

3. 设 f 是周期 2π 的连续函数, $F_h(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $h>0$.

(1) 证明: F_h 是以 2π 为周期的连续可微函数;

(2) 证明: $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ h>0$, 使在 $[-\pi,\pi]$ 上一致成立 $|f(x)-F_h(x)|<\varepsilon$;

(3) 利用命题 15.2.8 重新证明 Weierstrass 第二逼近定理;

(4) 已知 f 的 Fourier 级数, 计算 F_h 的 Fourier 级数.

4. 设 f 为周期 2π 的连续函数, $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

(1) 计算 F 的 Fourier 系数;

(2) 证明: F 的 Fourier 级数一致收敛;

(3) 由此推出 f 的 Parseval 等式.

5. (1) 利用 $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\cos kt\,\mathrm{d}t$ 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 之和;

(2) 用类似的方法求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 之和.

6. 从上题的 (1) 所得的结果出发, 直接证明下列展开式成立:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, 0<x<\pi;$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\pi}{4}, 0<x<\pi;$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\frac{x}{2}, |x|<\pi;$

(4) $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, |x|<\pi;$

(5) $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, 0\leqslant x\leqslant\pi;$

(6) $\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, 0\leqslant x\leqslant\pi.$

7. (Stekelov (斯捷克洛夫) 不等式) 设连续函数 f 在 $[0,\pi]$ 上分段可导, 且 f' 在 $[0,\pi]$ 上可积和平方可积, 证明: 只要条件

(1) $\int_0^{\pi}f=0$ 和

(2) $f(0)=f(\pi)=0$

之中有一个满足, 就成立不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^{\pi}f'^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. (Wirtinger 不等式) 设连续函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可导, $f(-\pi)=f(\pi)$, 且 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积, 又 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x)=A\cos x+B\sin x$ 时等号成立.

9. 设周期 2π 的函数 f 及其导函数 f' 均分段连续, 证明: f 的 Fourier 级数在不含有 f 的间断点的任何闭区间上一致收敛.

10. 证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$.

11. 设函数 f 是以 2π 为周期的连续函数, 不恒等于 0, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=0, k=0,1,\cdots,n.$$

证明: f 在任何长度大于 2π 的区间上至少改变符号 $2n+2$ 次.

12. 设 f 是在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调函数, 且 $f(+\infty)=0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

13. 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-n}\sin nx$, 证明: $\displaystyle\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{|f(x)|\}\geqslant\frac{2}{\pi\mathrm{e}}$.

14. 对于收敛于 0 的给定正数数列 $\{\varepsilon_n\}$, 证明: 存在连续函数 f, 使得 f 的 Fourier 系数 $\{a_n\},\{b_n\}$ 对于无限多个 n 满足不等式 $|a_n|+|b_n|>\varepsilon_n$.

15. 设 $f\in C[-\pi,\pi]$, 且其导函数 f' 可积和绝对可积, 若有 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$f'(x)\sim\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^n c)\cos nx-na_n\sin nx],$$

其中 $c=\dfrac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi}$, 且有 $c=\displaystyle\lim_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}nb_n]$.

16. 设三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 有极限 $c=\lim_{n\to\infty}[(-1)^{n-1}nb_n]$, 又有可积和绝对可积函数 φ 满足条件 @跟锦数学微信公众号

$$\varphi(x)\sim\frac{c}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n+(-1)^nc)\cos nx-na_n\sin nx],$$

且在 φ 的连续点上成立 $f'(x)=\varphi(x)$.

17. 利用上题证明:三角级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-1}$ 是某个连续可微函数 f 的 Fourier 级数, 且 f 满足微分方程 $f''+f=-\sin x$, 并求出 f.

18. 证明: 在区间 $[a,b]$ 上的可积和平方可积函数空间中, 由有限个函数组成的正交系不可能是完备的.

19. (de la Vallée Poussin 核) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 记 @跟锦数学微信公众号

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t.$$

证明:

(1) $V_n(x)$ 是 n 次三角多项式;

(2) 函数列 $\{V_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f.

20. 证明: 三角级数 $\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx}{n}+\cdots$ 的部分和函数 $S_n(x)\geqslant -1$, 并且 $\lim_{n\to\infty}\min_{0\leqslant x\leqslant\pi}\{S_n(x)\}=-\ln 2$.

第16章无穷级数的应用

16.1.3练习题

1. (广义积分的控制收敛定理) 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭可积, 且内闭一致收敛于函数 S, 如果存在函数 F, 使 $|S_n(x)|\leqslant F(x)$ 对于每个 n 和每个 x 都成立, 且广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数均非负, 收敛半径为 $+\infty$, 和函数为 $S(x)$. 证明: 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n!$ 收敛, 则广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 且等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n!$.

3. 证明下列结果:

(1) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

(2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{8}$;

(3) $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi^2}{6}$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$.

4. 证明: $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

5. 证明: $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}+\cdots+\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

16.2.3练习题

1. 设已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = B$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛并求其和.

2. 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 为 m 次多项式, 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$ 的和.

3. 求 $1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots$ 的和.

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{2n^2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2}{n^2}$.

5. 设 $a>1$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

6. 求 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots$ 的和.

7. 求 $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots$ 的和.

8. 求 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$ 的和.

9. 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}$ 的和.

10. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)$ 的和.

11. 求 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\cdots$ 的和.

12. 求 $\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{15}}{15!}+\cdots$ 的和函数.

13. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和函数.

14. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

15. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数, $x>0$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

16. 设 $x>1$, 求 $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$ 的和函数.

16.3.6练习题

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上有定义, 且对每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得满足条件 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \forall\ x\in[a,b]$, 证明: $f\in C[a,b]$.

2. 设 $f\in C[a,b]$, 证明:

(1) f 可以在 $[a,b]$ 上展开为一致收敛的多项式级数, 且在级数中除第一项之外均为在 $[a,b]$ 上非负的多项式;

(2) f 可以在 $[a,b]$ 上展开为绝对一致收敛的多项式级数;

(3) 对于给定的收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中有无限多项大于 0, 存在于区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f 的多项式级数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, 使满足条件 $\sup_{x\in[a,b]}\{|P_n(x)|\} \leqslant a_n, \forall\ n=1,2,\cdots$.

3. 设 $f\in R[a,b]$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在两个多项式 $p(x)$ 和 $P(x)$, 使得满足条件:

(1) $p(x)\leqslant f(x)\leqslant P(x), \forall\ x\in[a,b]$;

(2) $\int_a^b |P(x)-p(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

4. 设 $f\in C[a,b]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明 f 为恒等于 0 的常值函数. 又若条件改为对于大于某个正整数 n_0 的所有 n 成立, 则也有相同结论.

5. (1) 设 $f\in C[-1,1]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_{-1}^1 x^{2n}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则 f 必为奇函数.

(2) 设 $f\in C[-1,1]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_{-1}^1 x^{2n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则 f 必为偶函数.

6. 设 $f\in C[0,1]$, 证明: 存在每项为奇次项的多项式序列在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f 的充分必要条件为 $f(0)=0$.

7. 设 $f\in R[a,b]$, 且对每个非负整数 n 满足条件 $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: f 在每个连续点上等于 0.

8. 设函数 f 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上可以展开为一致收敛的多项式级数, 证明: f 本身必是多项式. (这断定了 Weierstrass 定理不可能不做改变而推广到无限区间上去.)

16.5.2参考题

1. 求下列级数之和:

(1) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot7\cdot8}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot8\cdot9\cdot10}+\cdots$.

2. 求 Leibniz 型级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 之和.

3. 证明: $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\dfrac{1}{m^2-n^2}=-\dfrac{\pi^2}{8}$.

4. (Goldbach (哥德巴赫)) 设 q 取遍所有大于 1 的正整数的乘幂, 且其指数均大于 1, 证明 $\sum\limits_{q}\dfrac{1}{q-1}=1$.

5. 设 $a_1=2,a_2=8,a_n=4a_{n-1}-a_{n-2},n=3,4,5,\cdots$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot}a_n^2=\frac{\pi}{12}.$$

6. 证明: $\pi=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}$.

7. 设 $\{g_n\}$ 是 $[0,1]$ 上非负连续函数列, 且对每个 x^k $(k=0,1,\cdots)$ 存在极限 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^k g_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

证明: 对任意的 $f\in C[0,1]$, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

8. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且有原函数, $g\in C[a,b]$, 证明: $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

9. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界且有原函数, $g\in C^1[0,1]$ 且 $g'(x)>0$, 证明: 复合函数 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上有原函数.

10. 题 8 中 f 有界的条件不可以去掉 (见 [62] 的第二册 340 页). 在 $[0,1]$ 上定义 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

验证它们满足题 8 总能除 f 有界的所有条件, 但 $f\cdot g$ 在 $[0,1]$ 上无原函数.

11. 设函数 f 在有界开区间 (a,b) 上可以展开为一致收敛的多项式级数, 证明: f 必在 (a,b) 上一致连续.

12. 设 $f\in C[1,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon, x\in[1,+\infty).$$

13. 设 $f\in C[1,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 则对于每个 $\varepsilon>0$, 存在多项式 P, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-P(\mathrm{e}^{-x})|<\varepsilon, x\in(0,+\infty).$$

14. (处处连续处处不可导的函数) 将 $(0,1)$ 中的数 x 按照十进制展开为 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{10^k}$, 其中 x_k 为 0 到 9 的个位数字. 对于 x 有两种十进制表示的情况, 约定从某位后全为 0 的一种表示. 定义函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^k},$$

其中 $u_1=1$, 而当 $k\geqslant 1$ 时 @跟锦数学微信公众号

$$u_{k+1}=\begin{cases}u_k, & \text{若 } x_{k+1}=x_k,\\ 1-u_k, & \text{若 } x_{k+1}\neq x_k.\end{cases}$$

证明: f 于 $(0,1)$ 内处处连续, 但处处不可微. (本利见《美国数学月刊》(1952) 第 59 卷 222-225 页, 又见 [29].)

15. 设对每个正整数 n, $u_n(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负单调增加函数且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(1)$ 收敛. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 则 $S(x)$ 的不连续点集等于所有 $u_n(x)$ 的不连续点集之并.

16. (有稠密间断点的单调函数) 设数列 $\{x_n\}$ 是 $(0,1)$ 内的有理数全体, 又任取一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中要求每个 $a_n>0$. 然后对每个正整数 n 定义 @跟锦数学微信公众号

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_n,\\ a_n, & x_n<x\leqslant 1.\end{cases}$$

然后定义 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x), 0<x<1$, 并补充定义 $f(0)=-1, f(1)==1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 证明: f 是 $[0,1]$ 上以所有有理点为其间断点的单调函数.

17. (有稠密间断点的导函数) 已知函数 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的导函数以 $x=0$ 为其 (第二类) 间断点 (见上册 164 页). 设 $\{r_n\}$ 为区间 $(0,1)$ 内的所有有理点, 构造在区间 $(0,1)$ 上的函数项级数 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n},$$

将其和函数记为 F, 用逐项微分定理求出导函数 F', 并证明: F' 在 $(0,1)$ 内以每个 r_n 为其第二类间断点, 而在其他点上连续.

第17章高维空间中的点集与基本定理

17.1.3思考题

1. 按定义证明闭集的如下重要性质:

   (1) 任意多个闭集的交集是闭集;

   (2) 有限多个闭集的并集是闭集.

2. 证明聚点定义 (1), (2) 的等价性.

3. 在例题 17.1.1 的证明过程中, 我们使用的是聚点等价定义 (1). 若使用原始定义, 证明是否能通过? 若不能, 应如何修改?

4. 无限多个开集的交是否一定是开集?

17.1.4练习题

1. 证明: $\bar{S}=S\cup\partial S$.

2. 证明: $\partial S=\bar{S}-S^{\circ}$.

3. 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $\bar{A} \cap B^{\circ} = \varnothing$.

4. 证明: $S = S^d \Leftrightarrow S$ 闭, 且 S 无孤立点.

5. S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的点集, 证明: $\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, S) = 0\}$.

6. 若 S 为凸集, 则 $\bar{S}$ 也是凸集.

7. 对于集合 S 与任一组集合 $A_\alpha, \alpha \in I$, 恒有分配律: @跟锦数学微信公众号

$$S \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (S \cap A_\alpha).$$

17.2.3练习题

1. 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个不相交的闭集, 其中一个有界, 证明: $d(A, B) > 0$. 如果 A, B 均是无界闭集, 是否仍有 $d(A, B) > 0$?

2. 设 S_1, S_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的闭集, 其中一个有界. 证明: 存在开集 O_1, O_2 满足 $S_i \subset O_i, i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

3. 由闭矩形套定理证明凝聚定理.

4. 由凝聚定理证明 Cauchy 收敛定理.

5. 由紧性定理证明聚点定理.

17.3.2第1组参考题

1. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交, 每个开集可表为可列个闭集的并.

2. 用闭集套定理证明三角形三边上的中线交于一点.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$E = \{(x, f(x)); x \in (-\infty, +\infty)\}$$

是平面上的闭集 (称为 f 的图像).

4. 证明: S° 是开集, 而且是包含于 S 的最大开集.

5. ($\mathbb{R}^n$ 的正规性) 设 S_1, S_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的闭集 (不一定有界). 证明: 存在开集 O_1, O_2 满足 $S_i \subset O_i, i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

6. (1) 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集合. 证明: $\forall\ \delta>0$, $\exists\ S$ 中有限多个点 $p_1,p_2,\cdots,p_k$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}O_\delta(p_i)\supset S$;

(2) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式: 若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖, 则 $\exists\ \delta>0$, 使得 $\forall\ p\in F$, 存在 $\{G_\alpha\}$ 中的一个开集 G, 满足 $O_\delta(p)\subset G$;

(3) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式与通常的表述形式 (若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖, 则存在 $\{G_\alpha\}$ 中的有限个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_m$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_i\supset F$) 等价.

17.3.2第2组参考题

1. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中的开集 D 是连通的充分必要条件是 D 不能分解为两个不想交的非空子开集的并.

2. 证明: $\mathbb{R}$ 中集合 D 是道路连通的充分必要条件是 D 为区间.

3. 证明: 有公共点的连通集的并集是连通集.

4. 证明: $A=\{(x,y);xy$ 至少有一个是有理数 $\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的道路连通集.

5. 证明: 道路连通集一定是连通集, 但连通集未必是道路连通集. (考查例子 $E=\left\{(x,y);y=\sin\dfrac{1}{x},0<x\leqslant\dfrac{2}{\pi}\right\}$, 证明 $\bar{E}$ 是连通而非道路连通的.)

6. 设 A,B 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集, 定义 $A+B$ 为一切形如 $x+y$ 的点组成的集合, 其中 $x\in A,y\in B$.

(1) 如果 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集, C 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, 证明: $K+C$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集.

(2) 如果 K,C 均为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, $K+C$ 未必是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集. 考虑 K 为整数集合, C 为一切形如 αn 的数组成的集合, 其中 $m\in K$, α 是某个确定的无理数. 证明: $\overline{K+C}=\mathbb{R}$, 但 $K+C\neq\mathbb{R}$.

第18章多元函数的极限与连续

18.1.4思考题

1. 证明多元函数极限的 Heine 归结原理: 设点 $a\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

的充分必要条件是: 对满足条件 $x_k \neq a(k=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ 的每个点列 $\{x_k\}$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = A$. (参见上册 104-105 页.)

2. 证明多元函数极限的 Cauchy 收敛准则: 函数 $f(x)$ 在点 a 有极限的充分必要条件是对每一个 $\varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, 使得对于 $O_\delta(a) \setminus \{a\}$ 中的每一对点 x', x'', 满足不等式 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

18.1.6练习题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0; \end{cases}$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

2. 证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 不存在.

3. 讨论下列函数在点 $(0,0)$ 的重极限与累次极限:

(1) $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(2) $(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + y\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. 设一元函数 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导数, 定义二元函数

$$g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, x \neq y,$$

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)} g(x,y)$.

5. 叙述并证明二元函数极限存在的唯一性定理具有有界性定理与局部保号性定理.

6. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, 且在点 (x_0,y_0) 附近有 $|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$, 证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

7. 证明: 在命题 18.1.2 中若 $f(x,y)$ 除直线 $x=x_0,y=y_0$ 外有定义, 其他条件不变, 则重极限与两个累次极限都存在, 并且相等.

18.2.5练习题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 函数列 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛并满足条件 $c\leqslant\varphi_n(x)\leqslant d$, 证明: 函数列 $F_n(x)=f\left(x,\varphi_n(x)\right)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

2. 证明: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.

3. 在命题 18.2.1 中, 由 (1) 直接证明 (4).

4. 如果 f 把 $\mathbb{R}$ 中的任意开集映为开集, 问 f 是否是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

5. $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且 $\lim\limits_{|x|+|y|\to\infty}f(x,y)$ 存在. 证明: $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 且一致连续.

6. 证明: 若 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是有界闭域, f 为 D 上连续函数, 则 $f(D)$ 是一个有界闭区间.

7. 利用命题 18.2.1 和例题 18.2.7 重新证明上一章的第一组参考题 5.

8. (14.1.1 小节中 Dini 判别法的推广) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $\{f_k\}$ 是 D 上的连续函数列, 且对每一点 $x\in D$ 有 $f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f_k(x)\geqslant\cdots$ 以及 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=0$. 证明: 函数列 $\{f_k\}$ 在 D 上一致收敛.

9. 证明: 在例题 18.2.8 中的 $\omega_f(a)$ 可改为 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\sup\limits_{|a-x|\leqslant\delta}\{|f(a)-f(x)|\}$.

10. 证明: 连续函数把紧集映为紧集.

18.3.2第1组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续, 且关于 y 单调增加. 如果有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{y\to d^-}f(x,y)=f(x,d),x\in[a,b],$$

证明: 这一收敛关于 $x \in [a,b]$ 是一致的, 即 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < d-y < \delta$ 时, 对所有的 $x \in [a,b]$, 都有 $|f(x,y) - f(x,d)| < \varepsilon$.

2. 设 f 在 $[a,b] \times [c,d]$ 上连续, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$\psi(x) = \max_{a \leqslant \xi \leqslant x} \left\{ \max_{a \leqslant y \leqslant \xi} \{f(\xi, y)\} \right\},$$

证明: $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集, f 为定义在 D 上导函数, 证明: f 在 D 上连续的充分必要条件是下列集合 @跟锦数学微信公众号

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y = f(x), x \in D\right\}$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧集.

4. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 $[0,1]$ 上的 n 个连续函数, 称 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在 $[0,1]$ 上线性相关, 若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) \equiv 0, x \in [0,1].$$

证明: $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在 $[0,1]$ 上线性相关的充分必要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$\det \left(\left[\int_0^1 f_i(x) f_j(x)\, \mathrm{d}x \right]_{n \times n} \right) = 0,$$

其中 $\det(A)$ 是 A 的行列式.

5. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 k 个相异的点, 证明: 存在一个最小半径的圆盘 B, 把这 k 个点覆盖. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 也有类似的每个命题.

6. 设 A, B 是两个 n 阶的实对称方阵, 其中 B 是正定矩阵. 设函数 @跟锦数学微信公众号

$$G(x) = (x^{\mathrm{T}} B x)^{-1} (x^{\mathrm{T}} A x)$$

定义在 $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上, 其中 x^{T} 是 x 的转置. 证明:

(1) $G(x)$ 可以在 E 上取到最大值;

(2) $G(x)$ 的最大值点是与 A, B 有关的某个矩阵的特征向量. 请写出这个矩阵.

18.3.2第2组参考题

1. 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个映射, 如果存在常数 $\theta, 0<\theta<1$ 以及正整数 n_0, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|\mathcal{T}^{n_0}x-\mathcal{T}^{n_0}y|\leqslant\theta|x-y|,\forall\ x,y\in\mathbb{R}^n,$$

证明: 映射 $\mathcal{T}$ 有唯一的不动点.

2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, f 是 Ω 到 Ω 的一个映射, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\quad\forall\ x,y\in\Omega,x\neq y.$$

证明: f 在 Ω 中存在唯一的不动点. 能否把命题中有界闭集的假设减弱为一般的有界集或无界的闭集?

3. 证明: 连续映射将连通集映为连通集.

4. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 函数 f 定义在 Ω 上, 对于点 $x_0\in\Omega$, 如果 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当点 $x\in\Omega$, 且 $|x-x_0|<\delta$ 时 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon\ (\text{或}\ f(x)>f(x_0)-\varepsilon),$$

则称 f 在点 x_0 处上半连续 (或下半连续). 证明:

(1) f 在点 x_0 上半连续的充分必要条件是 f 在点 x_0 的邻近有上界, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\varlimsup_{\Omega\ni x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0);$$

(2) f 在点 x_0 下半连续的充分必要条件是 f 在点 x_0 的邻近有下界, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\varliminf_{\Omega\ni x\to x_0}f(x)\geqslant f(x_0).$$

5. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, f 是 Ω 上的上半连续函数 (下半连续函数), 则 f 在 Ω 上有上界并达到最大值 (有下界并达到最小值).

6. 设 $\{f_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集 Ω 上的连续函数列, 如果对每个点 $x\in\Omega$, 均有 @跟锦数学微信公众号

$$\sup_k\{f_k(x)\}<+\infty,$$

证明: 函数 $f(x)=\sup\limits_k\{f_k(x)\}$ 在 Ω 上达最小值.

7. (Peano 曲线)

(1) 设 Δ 是 $\mathbb{R}^2$ 中由 $y=0, y=\sqrt{3}x$ 和 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 所围成的正三角形闭区域. 映射 $f_0:[0,1]\to\Delta$ 定义为 @跟锦数学微信公众号

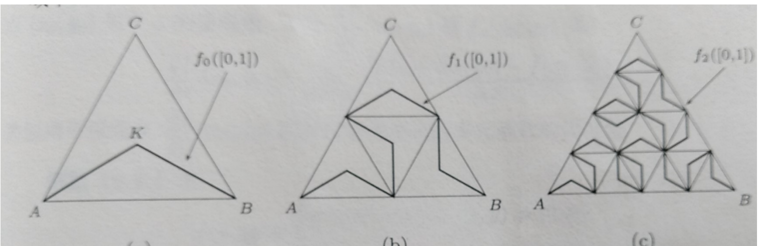
$$f_0(0)=(0,0),\quad f_0\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right),\qquad f_0(1)=(1,0),$$

其余线性联结. 则 $f_0([0,1])$ 是 Δ 中从端点 A 到重心 K 再到端点 B 的一条折线 L (见图 18.1 (a)).

(2) 然后将 Δ 等分成四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形区域 $\Delta_i, i=1,2,3,4$, L 等分成长度为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的四段 $L_i, i=1,2,3,4$. 设 $g_0:L\to\Delta$ 以类似 f_0 的方式一次把 $L_i, i=1,2,3,4$ 映到 $\Delta_i, i=1,2,3,4$ 中. 令 $f_1=g_0\circ f_0$, 则 $f_1([0,1])$ 就是 Δ 中一条联结 A,B 的折线, 由 2×4 段直线段连成 (见图 18.1 (b)).

(3) 再将 g_1 把 $f_1([0,1])$ 的每一段作类似于 g_0 那样的变换. 令 $f_2=g_1\circ f_1$, 则 $f_2([0,1])$ 就如图所示是一条由 2×4^2 段直线段连成的折线 (见图 18.1 (c)).

(4) 依类似的方式定义 $f_k=g_{k-1}\circ f_{k-1}:[0,1]\to\Delta, k=3,4,\cdots$, 使得 $f_k([0,1])$ 是一条由 2×4^k 段直线段连成的折线. 每段直线分别位于边长为 $\frac{1}{2^k}$ 的小正三角形区域中, 且 g_{k-1} 保持 $f_{k-1}([0,1])$ 的点在它所在的小正三角形区域中.



(a) (b) (c)

图 18.1

(1) 证明: 任取 $n>m$, 有 $|f_n(t)-f_m(t)|\leqslant\frac{1}{2^m}$, 从而 $f(t)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 设其极限映射为 f, 证明: $f:[0,1]\to\Delta$ 连续;

(2) 证明: $f([0,1])=\Delta$, 即连续映射 f 把区间 $[0,1]$ 映为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的区域 Δ.

8. (Tietze (蒂策) 扩张定理) 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 为闭子集, $f:D\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$|f(x)| \leqslant M, x \in D$. 设 $g_0(x)=0$, $g_k(x)$ 归纳定义为

$$g_k(x)=\frac{2^{k-1}d(x,A_k)}{3^k\left[d(x,A_k)+d(x,B_k)\right]}-\frac{2^{k-1}d(x,B_k)}{3^k\left[d(x,A_k)+d(x,B_k)\right]},$$

其中

$$A_k=\left\{x\in D;\varphi_k(x)\geqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M\right\},B_k=\left\{x\in D;\varphi_k(x)\leqslant-\frac{2^{k-1}}{3^k}M\right\},$$

而 $\varphi_k(x)=f(x)=-[g_0(x)+g_1(x)+\cdots+g_{k-1}(x)], k=1,2,\cdots$.

(1) 证明: $g_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ 连续, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 并且当 $x\in D$ 时 $g(x)=f(x)$. 因此 g 称为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续扩张, 也称连续开拓;

(2) 证明: (1) 的结论当 f 并不有界时也成立.

(以上两题均取自 [2], 又见 [3] 之 §16.3)

9. 是否能把开集上的连续函数连续扩张到全空间? 一致连续函数呢? 考查 $\mathbb{R}$ 中的例子.

10. 证明: 可以把定义在 $\mathbb{R}^n$ 中有理点集上的一致连续函数唯一扩张到全空间.

第19章偏导数与全微分

19.2.3思考题

1. 为什么说 $f_x(x_0,y_0)$ 存在就能保证一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 连续? 由此能否进一步断言: 对充分接近 y_0 的 y_1, 一元函数 $f(x,y_1)$ 在点 x_0 连续?

2. 证明全微分的性质 (1), (2).

3. 举例说明:

(1) $f(x,y)$ 在某一点的邻域内存在偏导数, 但在该点不一定连续, 从而不一定可微;

(2) $f(x,y)$ 在某一点连续, 但在该点偏导数不一定存在, 从而不一定可微;

(3) $f(x,y)$ 在某一点可微, 但在该点偏导数不一定连续.

4. 证明: 若 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在, $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

5. 设 $z=f(x,y)$ 在开集 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上可微, 且全微分 $\mathrm{d}z$ 恒为零. 问 $f(x,y)$ 在 D 上是否应取常数值? 证明你的结论.

19.2.4练习题

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|x-y|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 讨论:

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否连续?

(2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否可微?

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 证明:

(1) $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 都存在;

(2) $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续;

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

3. 设 $f(x,y,z)$ 在开集 D 上有定义, $f_x(x,y,z),f_y(x,y,z)$ 在 D 上有界, 且对固定的 (x,y), $f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数. 证明: $f(x,y,z)$ 在 D 上连续.

4. 求 $u=\ln(1+x^2+y^2)$ 在 $(x,y)=(1,2)$ 处的全微分.

5. 已测得一圆柱体的地面直径 $D_0=10.44$, 高 $H_0=18.36$, 且测量误差 $|\Delta D|\leqslant 0.02$, $|\Delta H|\leqslant 0.01$. 试估计用体积公式 $\dfrac{1}{4}\pi D^2H$ 计算时的绝对误差 ΔV 与相对误差 $\Delta V/V$.

6. $f(x,y)$ 定义在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上, 且 f_y 在 I 上连续, 证明: $f(x,y)$ 对 Y 满足一致 Lipschitz 条件, 即 $\exists\ L>0$, 使得 $\forall\ (x,y_1),(x,y_2)\in I$, 都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 与 x 无关.

7. 若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x 和 f_y 在区域 D 内存在, 且 $\forall\ (x,y)\in D, f_x(x,y)s=f_y(x,y)=0$, 证明: $f(x,y)$ 在 D 上为常值函数.

8. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是开区域, $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 内满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},u^2+v^2=C,$$

其中 C 为常数, 证明: $u(x,y),v(x,y)$ 在 Ω 上均为常值函数.

9. 设 $f(x,y)$ 在 $G=\left\{(x,y);x^2+y^2<1\right\}$ 上有定义, 若 $f(x,0)$ 在点 $(x,0)$ 处连续, 且 $f_y(x,y)$ 在 G 上有界. 证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

19.3.4练习题

1. 设 $u=\mathrm{e}^x+\sin y+t,x=st,y=s+t$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

2. 设 $u=f(s,t),s=\dfrac{x}{y},t=\dfrac{y}{z}$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

3. 设 $u=f(s,t,y),s=\varphi(x,y),t=\psi(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

4. 设 $u=\mathrm{e}^x\sin y,x=2st,y=t+s^2$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial s},\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

5. 设 $u=f(ax^2+by^2+cz^2)$, 求 $\mathrm{d}u$.

6. 设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, 求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$.

7. 设 $w=F(xy,yz)$, F 为具有连续偏导数的二元函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial z}=y\frac{\partial w}{\partial y}.$$

8. 设 $z=f(xy)$, f 为可微的一元函数, 证明: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

9. 设二元函数 $u=F(x,y)$ 满足方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, 证明: $F(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数.

10. 设二元函数 F 在直角坐标系中可写成 $F(x,y)=f(x)g(y)$, 在极坐标系中可写成 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(\theta)$, 求 $F(x,y)$.

11. 证明: $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, 其中 φ,ψ 为具有二阶连续导数的一元函数.

12. 设 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 满足 $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$, 又设 $w=w(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$, 证明:

(1) $w=w(x(u,v),y(u,v))$ 满足方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$;

(2) $\frac{\partial^2(xy)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(xy)}{\partial v^2}=0$.

13. 证明: 可微函数 $z=f(x,y)$ 仅是 $ax+by$ $(ab\neq 0)$ 的函数的充分必要条件是 $b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$.

14. 设 $u(x,y)$ 由连续二阶偏导数, $F(s,t)$ 有连续一阶偏导数, 且满足 $F(u_x,u_y)=0, F_s^2+F_t^2\neq 0$, 证明: $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0$.

15. 设 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 有连续二阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 试求 $u(x,y)$.

19.4.2练习题

1. 设 $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x_0\in D$, 且存在矩阵 A, 使得在点 x_0 的邻域上有 @跟锦数学微信公众号

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0),$$

其中 $o(x-x_0)$ 表示当 $|x-x_0|\to 0$ 时, 模为高阶无穷小量的向量. 证明 f 在点 x_0 处可微, 且 $Jf(x_0)=A$.

2. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 是可微的向量值函数, 满足条件 $|f(t)|=1, \forall\ t\in\mathbb{R}$. 证明: $f'(t)\cdot f(t)=0$, 并对这个结果进行几何上的解释.

3. 设 $u(x,y), v(x,y)$ 在区域 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导数, 且存在 $C>0$, 对任意两点 $(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2$ $(i=1,2)$ 均成立 @跟锦数学微信公众号

$$(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2\geqslant C[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2],$$

其中 $u_i=u(x_i,y_i), v_i=v(x_i,y_i)$ $(i=1,2)$, 则 $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ 有 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$.

19.5.2参考题

1. 设 $u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$, 证明: 当 $t>0$ 时 $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda\frac{x^2}{t}}$, 其中 C 为正常数, λ 为小于 $\frac{1}{4}$ 的正常数.

2. 设 $\Gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{4\pi}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-\frac{1}{2}}$, 证明:

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right|\leqslant\frac{1}{4\pi}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-1},$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y\partial z}\right|\leqslant\frac{3}{4\pi}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-\frac{3}{2}},$$
$$\left|\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right|\leqslant C[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{-2},$$

其中 C 为正常数.

3. 设 $u(x,y)$ 有二阶偏导数, 无零点. 证明: u 满足方程 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ 的充分必要条件是 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

4. 证明: 关于 n 次齐次函数的命题 19.3.1-19.3.4.

5. 设 $u=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, 证明:

(1) $\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$;

(2) $\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{n(n-1)}{2}u$.

6. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵, $f(y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的二次可微函数, $F(x)=f(Ax)$. 证明: 当 $y=Ax$ 时有

(1) $\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$;

(2) $\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.

7. 求下列变换的 Jacobi 行列式:

(1) $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$, 求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}$;

(2) $x_1 = r\cos\theta_1, x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2$, 求 $\dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2)}$;

(3) $\begin{cases} x_1 & = r\cos\theta_1, \\ x_2 & = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \cdot & = \cdots, \\ x_{m-1} & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1}, \\ x_m & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1}, \end{cases}$,

这里 $r\geqslant 0, 0\leqslant\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m-2}\leqslant\pi, 0\leqslant\theta_{m-1}\leqslant 2\pi$. 试用数学归纳法求 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m-1})}.$$

8. 函数值计算的相对误差估计:

(1) 利用可微函数定义与近似等式 $\Delta f(x;h)\approx \mathrm{d}f(x)h$, 证明:设 $f(x)=f_1\cdot f_2\cdots f_n$ 是 n 个不为零的因子的乘积, 若 δ_i 是第 i 个因子的相对误差, 则它们乘积的相对误差为 $\delta=\delta(f(x);h)\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i$;

(2) 利用等式 $\mathrm{d}\ln f(x)=\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}f(x)$, 再次得到上题结果并证明: 一般的分式 $\dfrac{f_1f_2\cdots f_n}{g_1g_2\cdots g_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的相对误差是函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n,g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的值的相对误差的和.

9. 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 满足: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{cases} x_1'(t) & = a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) & = a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t), \\ \cdot & = \cdots, \\ x_n'(t) & = a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(T), \end{cases}$$

其中 $a_{ij}\geqslant 0, i,j=1,2,\cdots,n$. 假如对任何 i, 当 $t\to+\infty$ 时, $x_i(t)\to 0$. 问函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 必定是线性相关的吗 (这里函数线性相关的定义见上一章的第一组参考题 4)?

10. 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^2 映射, $Jf(x)$ 为 Jacobi 矩阵, 它的元素为 $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x), i,j=1,2,\cdots,n$. 在 Jacobi 行列式 $\det(Jf(x))$ 中对应的代数余子式为 $A_{ij}(x), i,j=1,2,\cdots,n$. 证明如下的 Hadamard 恒等式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}(x)=0, j=1,2,\cdots,n.$$

第20章隐函数存在定理与隐函数求导

20.1.3思考题

1. 证明: 方程 $F(x,y)=(x-y)^2=0$ 在点 $(0,0)$ 处有 $F_y(0,0)=0$, 但在 $x=0$ 附近仍存在唯一解 $y=x$ 且是连续可微的. 这与隐函数存在定理的结论是否矛盾?

2. 设有方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$, 证明:

   (1) 可确定点 $(1,1,1)$ 附近的隐函数 $z=z(x,y)$, 并求 $z_x(1,1)$;

   (2) 可确定点 $(1,1,1)$ 附近的隐函数 $y=y(x,z)$, 并求 $y_x(1,1)$.

20.1.4练习题

1. 设 $y=y(x)$ 由下述方程确定, 求 y',y'':

   (1) $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$;

   (2) $x^y=y^x$;

   (3) $xy-2^x\ln 2+2^y=0$.

2. 求在指定点的导数:

   (1) $y^3+y-x^2=0$, 求 $y'(0)$;

   (2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-4=0$, 求在点 $(1,3\sqrt{3})$ 处的导数 y';

   (3) $\sin x+2\cos y-1=0$, 求在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 处的 y',y''.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由下列方程确定的隐函数, 求指定的导数或微分:

   (1) $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$, 求在点 $(1,1,2)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $z=\sqrt{x^2-y^2}\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\mathrm{d}z$;

(5) $xy+yz+zx=1$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 设 $z=z(x,y)$ 由下列方程确定, 求指定的导数或微分:

(1) $f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$, 求 $\mathrm{d}z$;

(2) $f(x,x+y,x+y+z)=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $f(x+y,y+z,z+x)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 验证下列各题中给出的隐函数满足指定的方程:

(1) $xz_x-yz_y=2x$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(xy,z-2x)=0$ 确定的隐函数;

(2) $(x^2-y^2-z^2)z_x+2xyz_y=2xz$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$ 确定的隐函数;

(3) $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\dfrac{x}{z}=\varphi\left(\dfrac{y}{z}\right)$ 确定的隐函数, φ 二次连续可微, 且 $x-y\varphi'\left(\dfrac{y}{z}\right)\neq 0$;

(4) $u_x^2+u_y^2+u_z^2=2(xu_x+yu_y+zu_z)$, 其中 $u=u(x,y,z)$ 是由方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$$

确定的隐函数.

20.2.2思考题

1. 若由 $F(x,y,z,u)=0,G(x,y,z,u)=0,H(x,y,z,u)=0$ 可解出 $x=x(u),y=y(u),z=z(u)$, 根据隐函数存在定理应如何对函数 F,G,H 假设条件?

2. 对极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 在哪些点 (r_0,θ_0) 附近可存在反函数组 $r=r(x,y),\theta=\theta(x,y)$? 在 $(0,\theta_0)$ 附近能否存在反函数组? 对结论做出直观解释.

20.2.5练习题

1. 设 $x=\mathrm{e}^v+u^3, y=\mathrm{e}^u-v^3$, 求反函数组的一阶偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2. 对由方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

确定的函数 $x=x(z),y=y(z)$, 求在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ 处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

3. 对方程组 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz, \\ x+y+z=a \end{cases}$ 确定的隐函数组 $y=y(x),z=z(x)$, 求出导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 设 $\begin{cases} x=u\cos\dfrac{v}{u}, \\ y=\sin\dfrac{v}{u}, \end{cases}$ 求反函数组的偏导数 u_x,u_y,v_x,v_y.

5. 设 $u=u(x)$ 是由方程组 $u=f(x,y,z),g(x,y,z)=0,h(x,y,z)=0$ 所确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 求由方程组 $x=u\cos v,y=u\sin v,z=v$ 确定的 $z=z(x,y)$ 的所有二阶偏导数.

7. 设 $z=z(x,y)$ 为由方程组 $x=\mathrm{e}^{u+v},y=\mathrm{e}^{u-v},z=uv$ 所定义的函数, 求当 $(u,v)=(0,0)$ 时的 $\mathrm{d}z$, d^2z.

8. 设 $u=f(x,y,z),g(x^2\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$, 且已知 f 与 g 都有一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

20.3.3练习题

1. 把方程 $(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 变换为 x 作因变量, y,z 为自变量的形式.

2. 引用新函数 $r=\sqrt{x^2+y^2}, \varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 变换微分式 @跟锦数学微信公众号

$$w=x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

3. 以 $\xi=x+y, \eta=x-y$ 为新自变量, 变换方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 取 $u=y+z\mathrm{e}^{-x}, v=x+z\mathrm{e}^{-y}$ 为新的自变量, 变换微分式 @跟锦数学微信公众号

$$F=(z+\mathrm{e}^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+\mathrm{e}^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-\mathrm{e}^{x+y}).$$

5. 设 $u=x\mathrm{e}^z, v=y\mathrm{e}^z, w=z\mathrm{e}^z$, 试以 w 为新的因变量, u, v 为新的自变量, 变换方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 以 w 为新的因变量, ξ, η, ζ 为新的自变量, 变换方程 @跟锦数学微信公众号

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z},$$

其中 $\xi=\frac{x}{z}, \eta=\frac{y}{z}, \zeta=z, w=\frac{u}{z}$.

7. 试求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 在球坐标下的形式.

8. 以 $u=x+2y+2, v=x-y-1$ 为新的自变量, 变换方程 @跟锦数学微信公众号

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

9. 以 w 为新的因变量, u, v 为新的自变量, 变换方程 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中 $u=x, v=x+y, w=x+y+z$.

10. 设 $xu=x^2+y^2, yv=x^2+y^2$, 证明: $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\frac{uv}{xy}$.

11. 若 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 可微, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

12. 设 $u=xy, v=\frac{x}{y}$, 试求 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

13. 设 $u=\frac{x}{r^2}, v=\frac{y}{r^2}, w=\frac{z}{r^2}$, 其中 $r^2=x^2+y^2+z^2$, 试求 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

20.5.2第1组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 是在点 $(0,1)$ 附近连续可微, 且 $f_y(0,1)\neq 0, f(0,1)=0$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$f\left(x,\int_0^t \sin s\,\mathrm{d}s\right)=0$$

在点 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 附近确定一个隐函数 $t=\varphi(x)$, 并求 $\varphi'(0)$.

2. 证明: 由方程 $y=x+\frac{1}{2}\sin y$ 可在 $(-\infty,+\infty)$ 中确定隐函数 $y=y(x)$, 且 $y(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, 即 $y(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的无穷次可微函数.

3. 设 $x=y+\varphi(y)$, $\varphi(y)$ 满足 $\varphi(0)=0,\varphi'(y)$ 在 $(-a,a)$ 中连续, 且 $|\varphi'(0)|\leqslant k<1$. 证明: 存在 $\delta>0$, 使当 $-\delta<x<\delta$ 时有唯一可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$.

4. 证明: 方程 $F(x,y)=1-\mathrm{e}^{-x}+y^3\mathrm{e}^{-y}=0$ 在 $\left\{x>0,y\in\mathbb{R}^1\right\}$ 中存在唯一的解 $y=y(x)(x>0)$, 且 $y(x)$ 连续可微.

5. 设 $f(x,y)$ 满足: f_x 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在, f_y 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在且连续, 且 @跟锦数学微信公众号

$$|f_x|<M|f_y|, f(x_0,y_0)=0,$$

这里 M 是正常数. 证明: $f(x,y)=0$ 唯一确定一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微解 $y=y(x)$, 且满足 $y(x_0)=y_0$. 再问条件 $|f_x|<M|f_y|$ 是否是必要的? 若去掉 $f(x_0,y_0)=0$ 这个条件, 结论是否仍成立?

6. 设 $u=f(x,y),v=g(x,y)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数. 证明:

(1) 如果在 Ω 上的 Jacobi 矩阵的秩恒为 1, 则对 Ω 内任一点 (x_0,y_0), 存在 (x_0,y_0) 的邻域 U 和连续可微的函数 $F(u,v),(F_u')^2+(F_v')^2\neq 0$, 使 $F(f(x,y),g(x,y))=0$ 在 U 上恒成立;

(2) 若有连续可微函数 $F(u,v),(F_u')^2+(F_v')^2\neq 0$, 使 $F(f(x,y),g(x,y))=0$ 在 Ω 上恒成立, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0,(x,y)\in\Omega.$$

7. 设空间曲线 C 的方程是: @跟锦数学微信公众号

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)},\quad -1<t<1,$$

其中 f,φ 在 $(-1,1)$ 上有二阶连续导数, 且一阶导数处处不等于 0. 设点集 @跟锦数学微信公众号

$$E=\left\{(x,y,z);x=s^2+\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}+f(t),y=2s+\varphi(t),z=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)},s,t\in(-1,1)\right\}.$$

证明: E 中与曲线 C 充分接近 (即 $|s|$ 充分小) 的一些点, 组成一张连续曲面 $z=z(x,y)$.

8. 设函数 $f(x,y),g(x,y)$ 是定义在平面开区域 G 上的两个函数, 在 G 上均有连续的一阶偏导数, 且在 G 内任意点处均有 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0.$$

又设有界闭区域 $D\subset G$. 证明: 在 D 内满足方程组 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=0,\quad g(x,y)=0$$

的点至多有有限个.

9. 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的连续可微函数. 若 $f(x,y,z)=0$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}=-1$.

(1) 解释上述命题的精确含义;

(2) 对 Clapeyron (克拉佩龙) 公式 $\dfrac{P\cdot V}{T}=$ 常数, 验证上述命题的正确性;

(3) 对于 n 元连续可微函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 确定的关系式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 是否有上述类似公式? 验证你的判断.

10. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为 C^1 映射, 若只存在有限多个点 $x_1,x_2,\cdots,x_r$, 使得

$$\det Jf(x_i)=0,i=1,2,\cdots,r,$$

并且对每个正数 M, $\{z\in\mathbb{R}^2;|f(z)|\leqslant M\}$ 是有界集, 证明: f 把 $\mathbb{R}^2$ 映满 $\mathbb{R}^2$.

11. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射, 且 $Jf(x_0)$ 可逆. 证明: $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, 只要 $|x|$ 充分小, 就存在 $z\in\mathbb{R}^n, z=o(|x|)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_0+x+z)-f(x_0)-Jf(x_0)x=0.$$

20.5.2第2组参考题

1. 试用压缩映射原理证明如下局部微分同胚定理: 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k 映射, $x_0 \in U$, $\det Jf(x_0) \neq 0$. 则存在 x_0 的邻域 $W \subset U$ 和 $f(x_0)$ 的邻域 V, 使得 $f: W \to V$ 是 C^k 微分同胚.

2. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射, 且存在 $\alpha > 0$ 使 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$u^{\mathrm{T}} \cdot Jf(x) \cdot u \geqslant \alpha |u|^2, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n,$$

其中 u^{T} 表示 u 的转置. 证明:

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \alpha |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

且 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的微分同胚.

3. 用映射的语言叙述隐函数存在定理, 将它化为逆映射存在定理或直接用压缩映射原理证明.

4. 20.2.4 小节的逆映射存在性定理证明是构造性的, 它给出了逆映射迭代构造格式. 设 $y \in V$, 取合适的初始点 $x_0 \in U$, 则

$$x_n = x_{n-1} + (f'(a))^{-1} (y - f(x_{n-1}))$$

就给出了迭代列 $\{x_n\}$ 的公式. 讨论映射

$$T: u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), v = xy$$

的逆映射. 设 $a = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. 先求

$$T'(a) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(1,1)},$$

再利用迭代公式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + (T'(a))^{-1} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 \\ x_{n-1} y_{n-1} \end{pmatrix} \right]$$

在 a 的邻域内求 T^{-1} 的二次迭代解 $(x_2, y_2)^{\mathrm{T}}$, 并用它与逆映射的一次微分近似

$$T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v - 1 \end{pmatrix}$$

作比较.

5. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k 映射, 满足条件: @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=0, \quad Jf(0) \text{ 的秩为 } m\,(m \leqslant n).$$

证明: 存在 $\mathbb{R}^n$ 中含 0 的两个邻域 V 及 W, C^k 微分同胚 $h: V \to W$ 使得 $h(0)=0$, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & h \circ f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ =& (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots, 0), \quad \forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in f^{-1}(V). \end{aligned}$$

6. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k 映射, 满足条件: @跟锦数学微信公众号

$$f(0)=0, \quad Jf(0) \text{ 的秩为 } n\,(m \geqslant n).$$

证明: 存在 $\mathbb{R}^m$ 中含 0 的两个邻域 V 及 W, C^k 微分同胚 $\varphi: V \to W$ 使得 $h(0)=0$, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$f \circ \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in V.$$

(以上两个命题称为秩定理, 如何对它们作一个简单的几何上解释?)

第21章偏导数的应用

21.1.4练习题

1. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点, 使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

2. 证明: 斜驶线 @跟锦数学微信公众号

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=\mathrm{e}^{k\varphi}, \quad k \text{ 是常数},$$

与地球的每一条子午线相交成定角, 其中 φ 是地球上点的经度, ψ 是地球上点的纬度.

3. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线与法平面方程.

4. 求曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的法线与切平面方程.

5. 证明: 曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的每一个切平面与坐标面形成体积相同的四面体.

21.2.3练习题

1. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向导数.

2. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x,y,z)=0$ 上的点 (x,y,z) 的法相方向 n 的方向导数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

3. 设 $f(t),u=u(x,y,z)$ 为可微函数, 证明: $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$.

4. 设 $f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处可微, $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 为 n 个单位向量, 相邻的两向量夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial l_i}(x_0,y_0)=0.$$

5. 设 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$, 其中 $a>b>c>0$. 求在点 $(0,0,0)$ 处函数 u 增加最快的方向.

6. 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y)=\begin{cases}x-y+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明: $f(x,y)$ 在原点处连续, 沿任何方向的方向导数存在, 但不可微.

21.3.4练习题

1. 设 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域上具有连续的二阶偏导数, 证明: 当 $h\to 0$ 时有 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)\\=&\frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{c}u(x_0+h,y_0)+u(x_0-h,y_0)\\+u(x_0,y_0+h)+u(x_0,y_0-h)-4u(x_0,y_0)\end{array}\right]+o(1).\end{aligned}$$

2. 对于下列函数, 点 $(0,0)$ 是否为驻点? 是否为极值点?

(1) $f(x,y)=x^2-4xy+5y^2-1$;

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $f(x,y)=(x+y)^2-y^2$.

3. 求下列函数的极值点与相应的极值:

(1) $u(x,y)=x^2(y-1)^2$;

(2) $u(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$;

(3) $u(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$.

4. 求 $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在 $D=\{(x,y);x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant\pi\}$ 上的最大、最小值.

5. 证明: 函数 $f(x,y)=x^3-3x^2+2xy-y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极大值点, 但该极大值点不是最大值点.

21.4.4练习题

1. 求 $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$ 在条件 $xyz=1$ 下的极值.

2. 求 $u=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值.

3. 求 $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ 满足条件 $x-y=\dfrac{\pi}{4}$ 的极值.

4. 求 $f(x,y,z)=x^ly^mz^n$ 满足条件 $ax+by+cz=k$ 的极值, 常数和变量均正.

5. 求 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1,x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ 下的极值, 其中 $a>b>c>0,\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

6. 设约束条件为 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{a},x_i>0,i=1,2,\cdots,n$, 而 $a>0$ 为定值. 求 $u=x_1x_2\cdots x_n$ 的极值.

7. 取满足约束条件 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2},x>0,y>0,z>0$ 时, $u=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$ 的极值.

8. 若 $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$, 求 $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 的极值, 其中 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是常数, 变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均大于 0.

9. 求 $u=x^3+y^3+z^3-2xyz$ 在 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 中的最大、最小值.

10. 求 $z=x^2-xy+y^2$ 在 $|x|+|y|\leqslant 1$ 中的最大、最小值.

11. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点, 是其到 n 个已知点 $M_i\ (x_i,y_i,z_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 距离的平方和最下.

12. 求点 $(-1,0)$ 到半立方抛物线 $y^2=x^3$ 的最短距离.

13. 在周长为定数的三角形中, 求面积为最大的三角形.

14. 分解正数 a 为 n 个因子, 使其倒数和最小.

15. 长为 a 的铁丝截成两段, 一段围成一个正方形, 另一端围成一个圆. 这两段个为多少时, 正方形与圆面积之和达最大值.

16. 过椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 上任意点作此椭圆的切线, 求切线与两坐标轴围成的三角形面积最小者.

17. 求原点到曲面 $(x-y)^2+z^2=1$ 的最短距离.

18. 求 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线到原点的最近距离.

19. 在圆外接三角形中, 求面积最小的三角形.

20. 设四边形各边长为定数, 求面积最大的四边形.

21. 在一个已知凸四边形内求一点 C, 使其到四个顶点距离的平方和最小.

22. 证明: 椭圆的内接三角形中, 面积答最大的三角形的一个顶点处的法线, 必定与此三角形的该顶点所对的边正交, 并求面积最大的内接三角形.

23. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点, 使到直线 $3x+4y=12$ 的距离最短.

24. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的任一切线与 x,y 轴分别交于 A,B 两点, 试求线段 AB 长度的最小值.

25. 在抛物线 $y=x^2$ 的所有与法线重合的弦中求长度最短的弦.

26. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 将圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 包围于其内, 试求 a,b的值, 使符合上述诶套件的椭圆的面积为最小.

27. 设方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数定理的条件, 并由此确定了隐函数 $y=f(x)$, 又设 $F(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数.

(1) 求 $f''(x)$;

(2) 若 $F(x_0,y_0)=0, y_0=f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极值, 证明: 当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 同号时, $f(x_0)$ 为极大值, 当 $F_y(x_0,y_0)$ 与 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 异号时, $f(x_0)$ 为极小值;

(3) 对方程 $x^2+xy+y^2=27$ 在隐函数形式下 (不解出 y), 求 $y=f(x)$ 的极值, 并用 (2) 的结论判别极大或极小.

28. 设 D 是由两抛物线 $y=x^2-1, y=-x^2+1$ 所围成的闭域, 试在 D 内求一椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 使其面积为最大.

21.6.2第1组参考题

1. 曲面 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 确定, 其中 a,b,c 为常数. 证明:

(1) 曲面的切平面经过定点 (a,b,c);

(2) 函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial z^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

2. 在平面上给定一个边长为 a,b,c 的三角形, 在它上面可作无数个等体积的给定高 h 的三棱锥, 在其中求出有最小侧面积 S 的那一个.

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, 记 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦. 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$.

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 为二次可微函数, $l_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i), i=1,2,3$ 为三个互相垂直的单位向量. 证明:

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

(3) 若 $\dfrac{\partial f}{\partial l_i}=0, i=1,2,3$, 则 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中恒为常数.

5. 设 f 在 $O_\delta(x_0)\subset\mathbb{R}^n$ 上连续, 在 $O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 可微, 证明:

(1) 如果 $\forall\, x\in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, 有 $(x-x_0)\cdot\nabla f(x)<0$, 则 x_0 是 f 的一个极大值点;

(2) 如果 $\forall\ x\in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, 有 $(x-x_0)\cdot\nabla f(x)>0$, 则 x_0 是 f 的一个极小值点.

6. 设 f 在 $O_\delta(x_0)\subset\mathbb{R}^n$ 上二次连续可微, Hesse 矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)\right)$ 为正定阵, $\nabla f(x_0)=0$. 证明: $\exists\ \delta\in(0,\delta_0)$, 使 $(x-x_0)\cdot\nabla f(x)>0,\forall\ x\in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$.

7. 用条件极值的方法证明 Hölder 不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $a_i\geqslant 0,x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n;p,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

8. 证明: 二次型 @跟锦数学微信公众号

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值与最小值恰好是矩阵 $\begin{pmatrix}A&F&E\\F&B&D\\E&D&C\end{pmatrix}$ 的最大特征值与最小特征值.

9. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵, 且设

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2=H_i,i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是 n 个确定的非负实数.

(1) 证明: 如果矩阵 A 的行向量是 $\mathbb{R}^n$ 的两两正交的向量, 则 $(\det A)^2$ 取到极值;

(2) 根据等式 $(\det A)^2=\det A\cdot\det A^{\mathrm{T}}$, 其中 A^{T} 是矩阵 A 的转置矩阵, 证明: $\max\limits_A\left\{(\det A)^2\right\}=H_1\times H_2\times\cdots H_n$;

(3) 证明: 对任意的矩阵 $B=(b_{ij})$ 有 Hadamard 不等式 @跟锦数学微信公众号

$$(\det B)^2\leqslant\prod_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n b_{ij}^2\right);$$

(4) 给 Hadamard 不等式以直观的几何解释.

10. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 上满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$, 则

(1) 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)\geqslant 0$, 证明: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $u(x,y)\geqslant 0$;

(2) 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 证明: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $u(x,y)>0$.

11. 对多元函数极值的充分性定理给出详细的证明.

12. 仿照 21.4.2 小节对具有多个约束条件的条件最值的确定给出详细的讨论.

21.6.2第2组参考题

1. 设二次连续可微函数 f 在点 p_0 处的梯度为零向量, 但 Hesse 矩阵 Q 为非零矩阵. 证明: f 在 p_0 处的函数值增长最快的方位位于 Q 的最大特征值对应的特征子空间中. 如最大特征值对应的特征子空间为一维空间, 则相应方向就是 f 增长最快的方向.

2. 设 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲线段 L 的参数表达式为 @跟锦数学微信公众号

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[a,b].$$

$P\,(x(a),y(a),z(a))$, $Q\,(x(b),y(b),z(b))$ 为 L 的起点与终点. Π 是通过直线段 PQ 的任一平面. 证明: $\exists\ \xi\in(a,b)$, 使得向量 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 与 Π 平行.

3. (Sanderson (桑德森) 中值定理) 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}^m$ 为 k 次可微向量值函数, 并且非零向量 v 与 $f(a),f(b)$ 及 $f^{(j)}(a),j=1,2,\cdots,k-1$ 正交. 证明: $\exists\ \xi\in(a,b)$, 使 v 与 $f^{(k)}(\xi)$ 正交, 其中 $f^{(j)}$ 表示 f 的各个分量函数的 j 阶导数组成的向量.

4. 证明: 与曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ $(abc\neq 0)$ 相切的三个垂直的平面的交点在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 上.

5. 设曲面 $\Sigma: z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的每一点的法线与 z 轴相交, 其中 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的圆环或圆盘, f 是 C^1 函数. 证明: Σ 是一个旋转曲面.

6. 证明: 不等式 @跟锦数学微信公众号

$$2ab\leqslant \mathrm{e}^{a-1}+a\ln a+\mathrm{e}^{b-1}+b\ln b$$

对所有 $a>0,b>0$ 成立. 并求出等式成立的充分必要条件.

7. 设 $T: u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 是平面上的一个变换. 如果在该变换下任何两条相交曲线的交角保持不变, 则称该变换是保角的.

(1) 如果 φ,ψ 满足 $\varphi_x=\psi_y, \varphi_y=-\psi_x$, 则 T 是保角变换;

(2) 证明: 下面的反演变换是保角的:

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2};$$

(3) 证明: 任一圆的反演像是另一圆或直线;

(4) 求出反演变换的 Jacobi 行列式;

(5) 证明: 连续可微变换 T 是保角的充分必要条件是它满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\varphi_x=\psi_y, \varphi_y=-\psi_x \text{ 或 } \varphi_x=-\psi_y, \varphi_y=\psi_x.$$

第一种情况保持角度方向, 第二种情况角度反向.

8. 由公式

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \zeta=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

定义三维反演变换.

(1) 证明: 任何两个曲面之间的夹角在反演变换下不变;

(2) 证明: 球面被变换为球面或平面;

(3) 求变换的 Jacobi 行列式.

第22章重积分

22.1.3思考题

1. 设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 D 上可积, 证明: $f(x,y)\cdot g(x,y)$ 也在 D 上可积. 设 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且 $f(x,y)\neq 0$, 证明: $\dfrac{1}{f(x,y)}$ 也在 D 上可积.

2. 设 $u=u(x,y)$ 在 D上可积, $f(u)$ 是 u 的连续函数, 证明: $f(u(x,y))$ 在 D 上可积. 如果 $f(u)$ 仅仅是 u 的可积函数, $f(u(x,y))$ 是否一定在 D 上可积?

3. 设 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上有界, 且在 D 上除了一个零面积集外处处相等, 证明: $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上有相同的可积性, 可积时有相同的积分值. 如果 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上除了一个零测度集外处处相等, 情况又如何?

4. 如果 $f(x,y)$ 在 $\tilde{D}\subset D$ 上有界可积, 且 $D\setminus\tilde{D}$ 为零面积集. 我们可以认为 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且其积分值就取 $f(x,y)$ 在 $\tilde{D}$ 上的积分值. 讨论:

(1) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{(x^2-1)^2+(y^2-1)^2}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上;

(2) $f(x,y)=\arctan\dfrac{1}{y-x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上

的可积性.

22.1.4练习题

1. 设 $f(x,y),g(x,y)$ 都是 D 上的可积函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$h(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

也是 D 上的可积函数.

2. 设 $f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的某邻域中连续, 求 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. 证明: $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\,\mathrm{d}u.$

4. 证明: $\displaystyle\iint\limits_{D}f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\ln2\int_1^2f(u)\,\mathrm{d}u$, 其中 D 为 $xy=1,xy=2,y=x,y=4x$ 在第一象限所围成的区域.

22.2.4练习题

1. 试把累次积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}\mathrm{d}x\int_0^{Rx}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

改写为先对 x 后对 y 的累次积分形式.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$.

3. D 由 $y=\pi-x, x=\pi, y=\pi$ 围成, 求 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. D 由 $y=0, y=x^2, x+y=2$ 围成的第一象限的部分, 求 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. 求由 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), z=x^2-y^2, z=0$ 围成之立体的体积.

6. 设 D 是由 $x^2=ay, x^2=by, y^2=px, y^2=qx$ 所围成的区域, 其中 $0<a<b, 0<p<q$, 求 $\iint\limits_D \frac{x^2\sin xy}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

7. 证明: $\int_a^b \mathrm{d}y \int_a^y (y-x)^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

8. 设 D 是第一象限内由 y 轴及两个圆 $x^2+y^2=a^2, x^2-2ax+y^2=0$ 所围成的区域, 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

9. 求由四条直线 $x+y=p, x+y=q, y=ax, y=bx$ $(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的图形的面积.

10. 求由曲线 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$ 与直线 $x=0, y=0$ 所围成图形的面积.

11. 求 $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y); |y|<|x|\leqslant 1\}$.

12. 求 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $xy=1, x^2+y^2=4$ 围成.

13. 给定积分 $I=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 作正则变换 $x=x(u,v), y=y(u,v)$, 区域 D 变为 Ω, 如果变换满足 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明: @跟锦数学微信公众号

$$I=\iint\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

14. 求积分 $\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \mathrm{d}x$.

15. 证明: $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \left(\sqrt{|xy|}+|xy|\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{3}{2}$.

16. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D |x-y^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$.

17. 求 $\iint\limits_D \ln\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=x,y=1,x=2$ 围成的三角形.

22.3.5练习题

1. 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}z \int_0^{1-z-x} (1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}y$.

2. 将累次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 \mathrm{d}y \int_0^x f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 化为在柱坐标系下的累次积分.

3. 求 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲线 $y^2=2x,x=0$ 绕 z 轴旋转而成的曲面, 平面 $z=2$, 与平面 $z=8$ 所围成的区域.

4. 求 $\iiint\limits_\Omega xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant 4$ 的公共部分, 且 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$.

5. 求 $\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{r}$, 其中 Ω 为一切半径为 R 的球, r 为球外一固定点到球域内任一点的距离.

6. 计算积分 $I=\iiint\limits_\Omega \frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 与平面 $z=0$ 所围成, 曲面在上方, 平面在下方.

7. 求 $\iiiint\limits_{\substack{x,y,z,u\geqslant 0\\x^2+y^2+z^2+u^2\leqslant 1}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$.

8. 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 f 为连续函数, $f(1)=1$. 证明: $F'(1)=4\pi$.

9. 设 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 由 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16$ 所确定, 试计算函数 f 关于 Ω 的积分平均值 $\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积.

10. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2, z=0, xy=1, xy=2, y=3x, y=4x$ 所围成, 求积分 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iiint\limits_{\Omega}x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

11. 利用正交变换计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{V}\cos(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, a,b,c 是不全为零的常数.

22.4.4练习题

1. 讨论下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|x|^q)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的无界区域, $\{D_n\}$ 是 D 中的单调增加的闭区域序列, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n=D$. 若 f 在 D 上非负, 且在每一个 D_n 上可积, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ys,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

3. 计算下列积分: $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

4. 讨论下列二重广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 D 由条件 $|y|\leqslant x^2, x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p}$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续, 讨论 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^p}$ 的收敛性, 其中 $D=[a,A]\times[b,B]$.

6. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D \ln\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=0, y=x, x=\pi$ 所界定.

22.5.4练习题

1. 计算由下列曲面围成的立体体积:

(1) $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i, i=1,2,3$, 其中三个平面的法向线性无关;

(2) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$, 其中 $a>0$;

(3) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;

(4) $(x^2+y^2)^2+z^4=z$.

2. 计算下列曲面的面积:

(1) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$;

(2) $(x^2+y^2+z^2)^2=z^3$;

(3) 连续曲线 $y=f(x)\ (\geqslant 0), x\in[a,b]$, 绕 x 轴旋转所得曲面.

3. 设抛物面壳 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的面密度 $\rho=z$, 求质量.

4. 半径为 R 的均匀圆盘, 其密度为 μ. 过圆心且与圆垂直的直线上有一密度为 ρ 的均匀细棒, 棒长为 l, 其近圆盘的一端与圆心相距为 a. 求圆盘对细棒的引力.

5. 半径为 a 的圆盘, 其各点的密度等于该点到圆心的距离. 今从圆盘上挖去一个半径为 $\frac{a}{2}$ 而其圆心里圆盘中心为 $\frac{a}{2}$ 的小圆盘. 求剩下几何图形的重心坐标.

6. 假定物体由连续的密度函数. 证明: 凸形物体的重心必在其体内.

7. 设 $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i>0, i=1,2,\cdots,m$, 且 $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}=1$. 证明:

$$\iint_{\Omega} u_1u_2\cdots u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \|u_1\|_{p_1}\|u_2\|_{p_2}\cdots\|u_m\|_{p_m}.$$

8. 证明: $\left\{\int_a^b \mathrm{d}x\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_c^d \mathrm{d}y\left[\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$, 其中 f 是连续函数.

22.6.2第1组参考题

1. 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上有如下定义:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}, & \text{当 } x=\dfrac{p_x}{q_x}, y \text{ 是无理数时},\\ \dfrac{1}{q_y}, & \text{当 } y=\dfrac{p_y}{q_y}, x \text{ 是无理数时},\\ 0, & \text{其它情况},\end{cases}$$

其中 q_x,q_y 分别表示有理数 x,y 写成既约分数后的分母. 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 但两个二次积分不存在.

2. 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 和 } y \text{ 都是非零有理数}, x=\dfrac{p_x}{q_x}, y=\dfrac{p_y}{q_y} \text{ 且 } q_x=q_y \text{ 时},\\ 0, & \text{其它情况},\end{cases}$$

其中 q_x,q_y 分别表示有理数 x,y 写成既约分数后的分母. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上不可约, 但两个二次积分存在且相等.

3. (1) 计算积分 $A=\int_0^1\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上连续, 且满足下列条件: @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\quad \iint_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

证明: $\exists\ (\xi,\eta)\in D$ 使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\dfrac{1}{A}$.

4. 证明: $1.96<\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<2.$

5. 设 f 是连续函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

6. 证明 Poincaré (彭加勒) 不等式: 设函数 $f(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在闭区域 @跟锦数学微信公众号

$$D=\{(x,y);a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$$

上连续, 其中 φ,ψ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(x,\varphi(x))=0$, 则存在常数 $K>0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant K\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(Poincaré 不等式可看成是 Wirtinger 不等式 (见第十五章参考题 8) 在高维空间的推广, 见 [27] 及其中所引文献.)

7. 设 $u,v\in L^p(\Omega),p\geqslant 1$. 利用 Hölder 不等式证明 Minkowski 不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\|u+v\|_p\leqslant\|u\|_p+\|v\|_p.$$

讨论 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式取等号的条件.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上四次连续可微, 在其边界上取零, 并且 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|\leqslant B,\quad (x,y)\in D.$$

证明: $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{B}{144}$.

9. 设二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$. 证明: 存在 D 的闭子区域 U, 使当 $(x,y)\in U$ 时, 有 $f(x,y)>0$.

10. 证明多重积分的中值定理: 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界闭区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上连续, 则 $\exists\ \xi\in\Omega$, 使 @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x_2\cdots\,\mathrm{d}x_n = f(\xi)\cdot(\Omega\text{ 的体积 }).$$

11. 设函数 p 在 $[a,b]$ 上非负连续, f,g 在 $[a,b]$ 上连续单调增加, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left(\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

12. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续、单调减少且恒取正值, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

13. 设 @跟锦数学微信公众号

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>R>0$, 则 $\dfrac{4\pi}{3}\dfrac{R^3}{A+R}\leqslant I\leqslant\dfrac{4\pi}{3}\dfrac{R^3}{A-R}$.

14. 设 $f(t)$ 是连续函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$F(t)=\iiint\limits_D f(xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $D=\{(x,y,z);0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t,0\leqslant z\leqslant t\}$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$F'(t)=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u,$$

其中 $g(u)=\displaystyle\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s$.

15. 设坐标平面上有一周长为 $2\pi l$ 的椭圆 Γ, 在其上选定一点作为计算弧长 s 的奇点, 以逆时针方向作为计算弧长的方向, 这时 Γ 有参数方程 @跟锦数学微信公众号

$$x=f(s),\quad y=\varphi(s),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi l.$$

x 轴的正半轴绕原点逆时针旋转, 首次转到与点 $(f(s),\varphi(s))$ 处切线正向一致时的倾角为 $\theta(s)$. 记 D 为 Γ 的外部区域内与 Γ 的距离小于 l 的所有点构成的区域.

(1) 如果用 t 表示 D 内一点 (x,y) 到 Γ 的距离, 试将 x,y 表示成 s,t 的函数 @跟锦数学微信公众号

$$x=x(s,t),\quad y=y(s,t),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi l,0<t<l;$$

(2) 用计算验证区域 D 的面积为 $3\pi l^2$.

22.6.2第2组参考题

1. 证明: 对任意 $\varepsilon>0$, @跟锦数学微信公众号

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q}{q}\leqslant\varepsilon a^p+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q,$$

其中 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,p,q>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

2. 利用上题以及例题 22.5.9 的结论证明内插不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\|u\|_q\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-\mu}\|u\|_q,$$

其中 $\mu=\dfrac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}},0<p<q<r,\varepsilon>0$.

3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域, $u(x,y)$ 在 Ω 上连续且取正值, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$\Phi_p(u)=\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega}u^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的面积, 证明:

(1) $\lim\limits_{p\to+\infty}\Phi_p(u)=\max\limits_{(x,y)\in\Omega}\{u(x,y)\}$;

(2) $\lim\limits_{p\to-\infty}\Phi_p(u)=\min\limits_{(x,y)\in\Omega}\{u(x,y)\}$;

(3) $\lim\limits_{p\to0}\Phi_p(u)=\exp\left\{\dfrac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega}\ln u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}$.

4. 设 P_0 为半径等于 R 的球内的一定点, 从点 P_0 想球面上任意一点 Q 处的切平面作垂线, 垂足为点 P. 当点 Q 在球面上变动时, 点 P 的轨迹形成一封闭曲面.

(1) 求此区间所围成的立体的体积;

(2) 问当点 P_0 沿什么方向变化时, 上述体积的变化率最大?

5. 证明不等式 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)^{\frac12}<\displaystyle\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}<\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4a^2}{\pi}}\right)^{\frac12}$.

6. 设连续函数 $f(x,y)$ 的等位线是简单封闭曲线, $S(v_1,v_2)$ 是由曲线 $f(x,y)=v_1$, $f(x,y)=v_2$ 所围成的域. 证明 Catalan 公式: @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)\,\mathrm{d}v,$$

其中 $F(v)$ 为由曲线 $f(x,y)=v_1$, $f(x,y)=v$ 所包围的面积, 还假设 $F(v)$ 可微且导函数 $F'(v)$ 可积.

第23章含参变量积分

23.1.3练习题

1. 求 $F(\theta)=\displaystyle\int_0^\pi\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x\ (|\theta|<1)$.

2. 设 $f(s,t)$ 为可微函数, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\mathrm{d}t\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\,\mathrm{d}s$. 求 $F'(x)$.

3. 设 $f(x,y)$ 在 $(a,b)\times(c,d)$ 上连续有界, 证明: $I(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 (a,b) 上连续.

4. 设 $I(a)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(R^2+a^2-2aR\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$, $|a|<R$, 证明: $I'(a)=0$.

5. 设 $a,b>0$, 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $F(t)=\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a f(x+y+t)\,\mathrm{d}y$, 其中 f 为连续函数, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$F''(t)=f(t+2a)-2f(t+a)+f(t).$$

7. 设 $f(t)=\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$, $g(t)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 证明: $f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}$, 并由此计算 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

23.2.3练习题

1. 讨论下列广义积分的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+a^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t,\ a\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}\,\mathrm{d}x,\ y\in[y_0,+\infty)$, 其中 $y_0>0$;

(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x, t\in(0,+\infty)$;

(4) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \alpha\in[0,+\infty)$;

(5) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\,\mathrm{d}x, y\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\int_0^{+\infty} x\ln x\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

(i) $t\in[t_0,+\infty)$, 其中 $t_0>0$,

(ii) $t\in(0,+\infty)$;

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t}\cos t\,\mathrm{d}t,\ u\in[0,1]$;

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\cdot \mathrm{e}^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in(0,+\infty)$;

(9) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin y\,\mathrm{d}y, x\in(0,+\infty)$;

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\,\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x, \alpha\in(0,1)$;

(11) $\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\,\mathrm{d}x, |t|<\frac{1}{2}$;

(12) $\int_0^1 (1-x)^{u-1}\,\mathrm{d}x$,

(i) $u\in[a,+\infty)$, 其中 $a>0$,

(ii) $u\in(0,+\infty)$.

2. 设 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ 当 $\lambda=a,\lambda=b$ 时收敛 $(a<b)$. 证明: $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致收敛.

3. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

23.2.6练习题

1. 设 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 对于 x 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 收敛, $f_x(x,y)$ 在 $U(x_0)\times[a,+\infty)$ 中存在, 且当 $x\to x_0$ 时, $f_x(x,y)$ 关于 y 的任何有限区间上一致收敛于 $f_x(x_0,y)$, 又知积分 $\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $U(x_0)$ 上一致收敛. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\bigg|_{x=x_0}$$

存在且等于 $\int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.

2. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}\,\mathrm{d}x$, 证: $F(\alpha)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续, 在 $\alpha=\pm1$ 处间断.

3. 证明: $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上连续.

4. 证明: $F(x)=\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-yx}}{y}\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\mathrm{e}^{-yx}\right)\mathrm{d}y.$$

5. 设 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$, 证明: $F(\alpha)$ 在 $(0,2)$ 中连续.

6. 设 $F(y)=\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-x^2y^2}\cos[x(1-y)]\,\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{y\to1}F(y)$.

7. 利用 Dirichlet 积分或 Euler-Poisson 积分求下列积分值:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$;

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

8. 利用积分号下求导的方法求下列积分:

(1) $\displaystyle I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ (a\geqslant 0)$;

(2) $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ (\alpha\geqslant 0)$;

(3) $\displaystyle f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y}x\mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}y\ (x\geqslant 0)$.

9. 利用积分号下求积分的方法求下列积分:

(1) $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ (\alpha\geqslant 0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$.

10. 求含参量瑕积分 $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ (|\alpha|\leqslant 1)$.

11. 计算 $\displaystyle I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2yx)\,\mathrm{d}x\ (-\infty<y<+\infty)$.

23.3.5练习题

1. 计算

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\frac{1}{x}}}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. 试用 Γ 函数或 B 函数表示

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x \,\mathrm{d}x \ (|\alpha| < 1)$;

(2) $\int_{-1}^1 (1+x)^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x \ (a, b > 0)$.

3. n 为正整数, $p > 0$, 证明 $B(p, n) = \dfrac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}$.

4. 证明: $\ln \Gamma(x)$ 是下凸函数.

5. 按照下列步骤证明公式 $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(1) $\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u$;

(2) $\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim\limits_{A\to+\infty} 4 \iint\limits_{G(A)} f(u, v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$, 其中 @跟锦数学微信公众号

$$f(u, v) = u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)},$$
$$G(A) = \{(u, v); 0 \leqslant u \leqslant A, 0 \leqslant v \leqslant A\}.$$

(3) 令 $D(R) = \left\{(r, \theta) 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{A\to+\infty} \iint\limits_{D(A)} f(u, v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}B(p, q)\Gamma(p+q),$$
$$\lim_{A\to+\infty} \iint\limits_{D(\sqrt{2}A)} f(u, v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}B(p, q)\Gamma(p+q);$$

(4) $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

23.4.2参考题

1. 设 $f(x, t), f_x(x, t)$ 连续, 记 $u(x, t) = \dfrac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \,\mathrm{d}\xi$, 其中 a 为正常数, 证明: $u(x, t)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$.

2. 设 n 为正整数. 证明: Bessel 函数 $J_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi) \,\mathrm{d}\varphi$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $f(0)=0$, 定义

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\quad 0<x\leqslant 1,\quad \varphi(0)=0.$$

证明:

(1) $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上一阶连续可导, 且

$$\varphi'(x)=\int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t,\quad 0<x\leqslant 1;\quad \varphi'(0)=0;$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t, 0<x\leqslant 1.$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上单调 $(A>0)$, 证明: $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+)$.

5. 设 $F(t)=t\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有界可积 $(\forall\ b>0)$, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$, 证明: $\displaystyle\lim_{t\to0^+}F(t)=\alpha$.

6. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

(1) $g(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+u)f(u)\,\mathrm{d}u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界;

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4\varepsilon}}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

7. 讨论下列函数在 $(0,1)$ 上的连续性:

(1) $f(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^\alpha}\,\mathrm{d}t$;

(2) $g(\alpha)=\displaystyle\int_0^1\frac{f(t)}{\sqrt{t-\alpha}}\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的有界可积函数.

8. 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围立体的体积.

9. 求立体

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant 1,\quad x,y,z\geqslant 0$$

的质心的 x 坐标.

10. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$ 所包围面积对 x 轴的惯性矩.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中连续, 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^1 te^{-t^2x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)$.

12. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

13. 求 $\int_0^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x$, 其中 $p>1$.

14. 求 $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$.

15. 求 Laplace (拉普拉斯) 积分 @跟锦数学微信公众号

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^k}\,\mathrm{d}x,\quad J_k=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{(a^2+x^2)^k}\,\mathrm{d}x,\quad a,b>0,\quad k\in\mathbb{N}_+.$$

16. 应用 Γ 函数的 Gauss 乘积分解公式 (13.38) 证明: Euler 常数 @跟锦数学微信公众号

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=-\Gamma'(1).$$

17. (1) 利用 n 次单位根分解证明: $1+x+\cdots+x^{n-1}=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x-\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}\right)$;

(2) 利用 (1) 证明: $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$;

(3) 证明: Euler 乘积 $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

第24章曲线积分

24.1.3练习题

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_C\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$, 其中 C 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(2) $\int_C\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $r=a,\varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 所界的凸围线;

(3) $\int_C|y|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(4) $\int_C\frac{\mathrm{d}s}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y=a\cosh\frac{x}{a}$;

(5) $\int_C z\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ 从 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 的弧.

2. 求下列空间曲线的弧长:

(1) $y=a\arcsin\frac{x}{a}, z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 从 $(0,0,0)$ 到 (x_0,y_0,z_0);

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2, \sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=a$ 从 $(a,0,0)$ 到 (x,y,z).

3. 计算均匀曲线 $y=a\cosh\frac{x}{a}$ 从 $(0,a)$ 到 (b,h) 的弧的质心坐标.

4. 设 $\Gamma=\widetilde{AB}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的简单可求长曲线, Γ 的弧长为 L. 对每一个 $s\in[0,L]$, 存在为唯一的 $x\in\Gamma, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 使得 Γ 上从 A 到 x 的曲线段 $\widetilde{Ax}$ 的弧长等于 s, 由此定义了一个 $[0,L]$ 上的函数

$$x=x(s),\quad 0\leqslant s\leqslant L.\qquad (eq1)$$

即曲线 Γ 以弧长 s 为参数的参数方程为 (eq1). 设 f 是定义在 Γ 上的函数, 如果 f 在 Γ 上的第一型曲线积分存在, 则

$$\int_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}s=\int_0^L f(x(s))\,\mathrm{d}s.$$

24.2.4练习题

1. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为曲线, $\widetilde{AB}$ 为由 A 到 B, $A=(1,1), B=(2,3)$:

(1) $\widetilde{AB}$ 是直线 AB;

(2) $\widetilde{AB}$ 的方程是 $y=2(x-1)^2+1$;

(3) $\widetilde{AB}$ 是折线 $\overline{ADB}$, $D=(2,1)$.

2. 求 $\int_C \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{y-a}\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 到 $t=\frac{\pi}{3}$ 的一段.

3. 求 $\int_C (x+y)^2\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是以 $A(1,1), B(3,2), D(3,1)$ 为顶点的三角形, 取顺时针方向.

4. 求 $\int_C 4xy^2\,\mathrm{d}x - 3x^4\,\mathrm{d}y$, 其中 C 是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段.

5. 求 $\oint\limits_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2ax$ 的交线 $(0<a<R, z>0)$, 且从 z 轴正向看是逆时针方向.

6. 求 $\int_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面上的曲线: @跟锦数学微信公众号

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\ y=R\sin\varphi\sin\theta,\ z=R\cos\varphi,$$
$$R>0, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta<2\pi,$$

并且使

(1) R,φ 为常数; 或

(2) R,θ 为常数.

7. 求 $\int_C (x^2+5y+3yz)\,\mathrm{d}x+(5x+3xy-2)\,\mathrm{d}y+(3xy-4z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为

(1) $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{bt}{2\pi}$ 自 $t=0$ 到 2π 的一段;

(2) 直线段 AB, 起点 $A=(a,0,0)$, 终点 $B(a,0,b)$.

8. 已知力场 $F(x,y,z)=yi-xj+(x+y+z)k$, 求质点沿曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\frac{b}{2\pi}t$ 从点 $A(a,0,0)$ 运动到点 $B(a,0,b)$ 时, 力场 F 对质点所做的功.

9. 质点在力场 $F=\frac{\mathrm{e}^x}{1+y^2}i+\frac{2y(1-\mathrm{e}^x)}{(1+y^2)^2}j$ 作用下, 沿 $x^2+(y-1)^2=1$ 由点 $(0,0)$ 沿顺时针方向运动到点 $(1,1)$, 求力场所做的功.

24.3.3练习题

1. 应用 Green 公式求下列第二型曲线积分.

(1) $\oint\limits_C (x^2+xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$, C 为由 $x=\pm1, y=\pm1$ 围成的正方形, 取正向;

(2) 求 $\oint\limits_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x(y+1)}{2+y}\,\mathrm{d}y$, C 的定义同 (1);

(3) 求 $\oint_C (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y$, C 为由 $x^2+y^2=1, x=y$ 及 y 轴围成的曲边三角形, 取正向;

(4) 求 $\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$, 其中 C 是:

(i) 旋轮线 $a=a(t-\sin t)-a\pi, y=a(1-\cos t)$ 对应于 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一拱;

(ii) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 从 $(2,1)$ 经上半圆到 $(0,1)$ 的一段弧.

2. 设 $f(x)$ 连续可微, L 为逐段光滑闭曲线, 证明:

(1) $\oint_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)=0$;

(2) $\oint_L f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0$.

3. 求 $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$, 其中 $u=x^2+y^2$, C 为 $x^2+y^2=6x$, n 为 C 上的单位外法向量.

4. 设 C 为逐段光滑的简单闭曲线, l 为给定方向, 证明: $\oint_C \cos(l,n)\,\mathrm{d}s=0$, 其中 n 为 C 上的单位外法向量.

5. 设 C 为包围原点的逐段光滑的简单闭曲线, $a_{ij}(i,j=1,2)$ 均为常数, $X=a_{11}x+a_{12}y, Y=a_{21}x+a_{22}y$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint_C \frac{X\,\mathrm{d}Y-Y\,\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=2\pi\operatorname{sgn}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}).$$

6. 设 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$, 方向为逆时针, 求积分 $\oint_L \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

7. 利用曲线积分求下列曲线所围区域的面积:

(1) $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(2) $x^3+y^3=3axy$;

(3) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=C\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$, $a,b,C>0, n$ 为正整数.

8. 先证明曲线积分与路径无关, 然后计算积分值:

(1) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\psi(y)\,\mathrm{d}y$, 其中 $\varphi(x),\psi(y)$ 是连续函数;

(2) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 沿不通过原点的路径.

9. 对于以下的一阶微分形式 w, 求函数 $M(x,y)\neq 0$, 使得在适当的区域内 Mw 为全微分, 并求其原函数:

(1) $w=[-y\sqrt{x^2+y^2-1}-x(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x+[x\sqrt{x^2+y^2+1}-y(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}y$;

(2) $w=x[(ay+bx)^3+ay^3]\,\mathrm{d}x+y[(ay+bx)^3+bx^3]\,\mathrm{d}y$.

24.5.2第1组参考题

1. 证明不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\left|\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant ML,$$

其中 L 是曲线 C 的弧长, $M=\sup\limits_{(x,y)\in C}\left\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\right\}$, 并利用这个不等式证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$, 其中 $I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}$.

2. 求第一型曲线积分

(1) $\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\mathrm{d}s\ (|a|\neq R)$;

(2) $\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\mathrm{d}s,\ (a^2+b^2\neq R^2)$.

3. 设 $f(x,y)$ 在 L 上连续, L 是逐段光滑的简单闭曲线, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$u(x,y)=\oint\limits_L f(\xi,\eta)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}s$$

当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时趋于 0 的充分必要条件是 $\oint\limits_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0$.

4. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 证明: $u(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,\forall r>$

0 都成立的充分必要条件是 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\oint_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s, \forall\ r>0$ 都成立.

5. 设 $f(x,y)$ 在 G 上一阶连续可微, 在 ∂G 上 $f(x,y)=0$, $G=\left\{x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\left|\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}a^3\max_G\left\{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

6. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在平面上有连续偏导数, 而且对以 $\forall\ (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 为心, 以 $\forall\ r>0$ 为半径的上半圆 $C: x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 都有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

证明: $P(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0\ (\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2)$.

24.5.2第2组参考题

1. 给出旋转性质 2 的一个不用曲线积分的证明.

2. 证明如下形式的高维中值定理: 设 $f(x)$ 为定义在以 r 为半径的球 @跟锦数学微信公众号

$$D=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2\right\}$$

上的连续可微函数, 则存在点 $p_0=(p_1^0,p_2^0,\cdots,p_n^0)\in D^\circ$, 使 @跟锦数学微信公众号

$$\max_{x\in D}\{f(x)\}-\min_{x\in D}\{f(x)\}=|\nabla f(p_0)|\cdot 2r.$$

3. 设 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ 是 n 边形的 n 个顶点, 而且原点在其内部, 证明: 存在正实数 x 和 y, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$(a_1,b_1)x^{a_1}y^{b_1}+(a_2,b_2)x^{a_2}y^{b_2}+\cdots+(a_n,b_n)x^{a_n}y^{b_n}=(0,0).$$

4. 设 D 是半径为 r 的一个圆所组成的平面区域, 对 D 内的点 (x,y), 用 $l(x,y)$ 表示以 (x,y) 为圆心, δ 为半径的圆在 D 外边的那段弧的长度. 试求

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\iint_D l(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5. 设 B 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘, C 是单位圆周, $g: B \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 是二阶连续可微映射.

(1) 用 Green 公式把 $\iint\limits_B \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$ 表示成 C 上的第二型曲线积分;

(2) 如果 g 在 C 上的限制是恒等映射, 即 $g(x) = x, \forall\ x \in C$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint_C x_1 \mathrm{d}x_2 = \oint_C g_1 \mathrm{d}g_2 = \oint_C g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + g_1 \frac{\partial g_2}{p x_2} \mathrm{d}x_2;$$

(3) 证明: 不存在满足 $g(x) = x, x \in C$ 及 $g(B) \subset C$ 的二阶连续可微映射 g;

(4) 对上述命题给出一个几何上的解释.

6. (1) 设 B, C 与题 5 相同, $f: B \to B$ 是二阶连续可微映射, $f(x) \neq x, \forall\ x \in B$, 从几何上可见以 $f(x)$ 为起点和 x 为终点的有向线段与 B 的边界 C 相交, 则交点可表示为 @跟锦数学微信公众号

$$g(x) = f(x) + t(x)(x - f(x)),$$

其中 $t(x)$ 是与 x 有关的参数, 证明: $t(x)$ 满足二次方程 @跟锦数学微信公众号

$$t^2(x)|x - f(x)|^2 + 2t(x)f(x) \cdot (x - f(x)) + |f(x)|^2 - 1 = 0;$$

(2) 证明 (1) 中的 $g(x) = x, x \in C$ 及 $g(B) \subset C$;

(3) 结合上题证明 (1) 中的 f 是不存在的, 即若 $f: B \to B$ 是二阶连续可微映射, 则 $\exists\ \xi \in B$, 使 $f(\xi) = \xi$. 我们得到了 Brouwer 不动点定理的另一个证明. 你能否举几个运用 Brouwer 不动点定理的实际例子.

第25章曲面积分

25.1.3练习题

1. 求 $\iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S$, 其中

(1) S 为 $z^2 = x^2 + y^2$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内的上半部分 $(z \geqslant 0)$;

(2) S 为 $x = r\sin\alpha\cos\theta, y = r\sin\alpha\sin\theta, z = r\cos\alpha, 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

2. 求 $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半单位球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geqslant 0)$.

3. 求 $\iint\limits_S (x+y+z)^2\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

4. 求 $\iint\limits_S (x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分.

5. 求 $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中

(1) S 为 $|x|+|y|+|z|=1$;

(2) S 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 割下的部分.

6. 求 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$, S 为 $|x|+|y|+|z|=a$.

7. 求 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 其中 $f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

8. 求 $F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为 $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=t^2$, $t>0$, (x,y,z) 为满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$ 的定点, $f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases} 1, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$

9. 求 $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 为立体 $x+y+z\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的表面.

10. 求 $\iint\limits_S \dfrac{|x|}{z}\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是柱面 $x^2+y^2=2ay$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=2a$ 所截下的部分.

11. 求 $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$ 给下的部分.

25.2.3练习题

1. 设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$, 且 $z(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 中连续可微, 证明:

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\pm\iint_{D}(-Pz_x-Qz_y+R)|_{z=z(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 Σ 取上侧时符号取 $+$, 当 Σ 取下侧时符号取 $-$.

2. 若 Σ 分块光滑, 且关于 xOy 平面对称, $f(x,y,z)$ 在 $\bar{\Sigma}$ 上连续, 且满足

$$f(x,y,z)=-f(x,y,-z),$$

问: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 还是等于 0? (其中 Σ_1 是 Σ 在 xOy 平面以上的部分.)

3. 若 Σ 分块光滑, 且关于 xOy 平面对称, $R(x,y,z)$ 在 $\bar{\Sigma}$ 上连续, 且满足

$$R(x,y,z)=-R(x,y,-z),$$

问: $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 还是等于 0? (其中 Σ_1 是 Σ 在 xOy 平面以上的部分, 取侧与 Σ 取侧相一致.)

4. 设 Σ 是平面 Π 内的一个有界区域, 其面积为 S, Π 取上侧的法向量为 n, 且 $\cos(n,z)=\mu$. 证明: Σ 在 xOy 平面上的投影的面积为 μS, 并利用这个结果重新计算例题 21.4.2.

5. 求 $I_1=\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, I_2=\iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 取外侧.

6. 计算 $\iint_{S} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1\leqslant z\leqslant 1$ 及 $x\geqslant 0$ 的部分, 取前侧.

7. 求 $\iint_{S} x(z^2-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y(x^2-z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z(y^2-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是 $y^2+z^2=1$ 被 $x=0,x=1,z+y=0,z-y=0$ 截取的上方部分, 取外侧.

25.3.2练习题

1. 利用 Gauss 公式计算积分:

(1) $\oiint\limits_S y(x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y^2+xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是正立方体

$$\{(x,y,z);0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a\}\ (a>0)$$

的表面, 取内侧;

(2) $\oiint\limits_S (x^3+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^2-xz)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$, 取外侧;

(3) 设 $A_1=x^3-x^2y+z^3, A_2=xy^2+y^3, A_3=xz+z^2$, Σ 是由 yOz 平面上的抛物线 $z=1-y^2$ 与 $z=0$ 所围成的平面区域绕 z 轴旋转后所得的旋转体的表明, 取外侧. 试求

$$\oiint\limits_\Sigma\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. 先添加辅助面, 再用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_\Sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant h$ 的一段, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 上的单位法向量, 其方向为下方;

(2) $\iint\limits_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上半部分, 取上侧;

(3) $\iint\limits_\Sigma\left(\frac{x^3}{a^3}+y^3z^3\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{y^3}{b^3}+z^3x^3\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{z^3}{c^3}+x^3y^3\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x\geqslant 0$, 取后侧.

3. $F(x,y,z)$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, 且 $F(x,y,z)=0$ 是一个以原点为顶点的锥面 Σ, 如果 Σ 与平面 $\Pi: Ax+By+Cz=D$ 围成一个椎体, 证明: 此椎体的体积 $V=\frac{1}{3}SH$, 其中 S 为平面 Π 上锥底部分的面积, H 为顶点到锥底的高.

4. 求由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 所围成的立体的体积.

5. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x^3+2x^2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 在 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{3}$ 的部分, 取外侧.

6. $V=\{(x,y,z);x^2+y^2<z<1\}$, $S=\partial V$, 求积分 $\oiint\limits_{S}yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 积分沿外法线方向.

7. 求第二型曲面积分 $\oiint\limits_{S}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

25.3.4练习题

1. 设 C 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上逐段光滑的闭曲线, C 所界的面积为 S, C 的定向与 $(\cos\alpha,\cos\gamma,\cos\gamma)$ 成右手系, 试计算积分 @跟锦数学微信公众号

$$\oint\limits_{L}\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

2. 求 $\oint\limits_{C}(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, C 为 $x^2+y^2=1$ 与 $x+y+z=1$ 的交线, 从 x 轴正向看是逆时针方向.

3. 求 $\int_C(z^3+3x^2y)\,\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\,\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $x=y$ 的交线, 自 $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ 到 $B\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$.

4. 用 Stokes 公式求 @跟锦数学微信公众号

$$\int_C \mathrm{e}^{x+z}\left\{[(x+1)y^2+1]\,\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y+xy^2\,\mathrm{d}z\right\},$$

其中 C 是右半柱面 $|x|+|y|=a$ $(y>0)$ 与平面 $y=z$ 的交线上从 $(-a,0,0)$ 到 $(a,0,0)$ 的一段 $(a>0)$.

5. 设 C 是空间任一逐段光滑的简单闭曲线, $f(x),g(x),h(x)$ 是任意连续函数. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oint\limits_{C}[f(x)-yz]\,\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\,\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\,\mathrm{d}z=0.$$

6. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z & x^3-yz & -3xy^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在 $z\geqslant 0$ 的部分, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 下侧的单位法向量.

7. 求 $\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看是逆时针方向.

25.3.6练习题

1. 证明: 下列微分式是全微分, 并求出其原函数:

(1) $(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z$;

(2) $\left[\dfrac{x}{(x^2-y^2)^2}-\dfrac{1}{x}+2x^2\right]\mathrm{d}x+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{(x^2-y^2)^2}+3y^3\right]\mathrm{d}y+5z^3\,\mathrm{d}z$.

2. 求 $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z$.

3. 设 C 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的任一点沿任一路径运动到球面 $x^2+y^2+z^2=b^2\ (b>a)$ 上的任一点的轨迹, C 分段光滑, 证明:

$$\int_C r^3(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=\frac{1}{5}(b^5-a^5),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

25.5.3参考题

1. 设 S 是平面 $x+y+z=t$ 上被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所割下的部分,

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

证明: $\displaystyle\iint\limits_S\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}\dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |t|>\sqrt{3}.\end{cases}$

2. 证明: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin y\,\mathrm{e}^{\sin y(\cos x-\sin x)}\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}})$.

3. 设 Ω 为空间第一卦限中的区域, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续一阶偏导数, S 为 Ω 中任一光滑闭曲面, 试给出第二型曲面积分 @跟锦数学微信公众号

$$\iint_S f(x,y,z)(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)=0$$

的充分必要条件, 并证明之.

4. 设 Σ 是光滑的闭曲面, 围成的区域为 Ω, n 为 Σ 上单位外法向量, (x_0,y_0,z_0) 为 Ω 内固定一点, $(x,y,z)\in\Omega$, $r=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\oiint_\Sigma \cos(n,r)\,\mathrm{d}S=2\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|r|}.$$

5. 已知平面 $\Pi: Ax+By+Cz=D$, 对于 Π 的任一定向, 求 $w=P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, 使得沿 Π 上任意逐段光滑简单封闭曲线 Γ (Γ 的定向与 Π 的定向一致) 恒有 $\oint_\Gamma w=S(\Gamma)$, 其中 $S(\Gamma)$ 为 Γ 在 Π 上所围区域的面积.

6. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中逐段光滑简单封闭定向曲线, 对于 $(x,y,z)\notin\Gamma$, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$P(x,y,z)=\oint_\Gamma \frac{(\zeta-z)\,\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\,\mathrm{d}\zeta}{r^3},$$
$$Q(x,y,z)=\oint_\Gamma \frac{(\xi-x)\,\mathrm{d}\zeta-(\zeta-z)\,\mathrm{d}\xi}{r^3},$$
$$R(x,y,z)=\oint_\Gamma \frac{(\eta-y)\,\mathrm{d}\xi-(\xi-x)\,\mathrm{d}\eta}{r^3},$$

其中 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Gamma$ 是积分变元, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

7. 在上题中求函数 $u(x,y,z)$, 使得 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$.

8. 利用 Gauss 公式证明 Archimedes 的流体静力学定律: 物体在液体中所受的浮力等于物体排开液体的质量, 方向垂直向上.

第26章场论初步

26.1.5练习题

1. 证明关系式 (26.7)-(26.14).

2. 证明命题 26.1.1.

3. $\boldsymbol{V}\subset\boldsymbol{D}\subset\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上连续可微, 证明: $\forall\ \boldsymbol{p}_0\in\boldsymbol{V}$, 成立

(1) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)=\lim\limits_{\dim\boldsymbol{V}\to 0}\dfrac{1}{|\boldsymbol{V}|}\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{\Sigma}=\partial\boldsymbol{V}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的边界, $\dim\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的直径, $|\boldsymbol{V}|$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的体积, $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的单位外法向量;

(2) $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)=\lim\limits_{\dim\boldsymbol{V}\to 0}\dfrac{1}{|\boldsymbol{V}|}\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$;

(3) $\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{p}_0)=\lim\limits_{\dim\boldsymbol{V}\to 0}\dfrac{1}{|\boldsymbol{V}|}\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}}\varphi\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\varphi(x,y,z)$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上连续可微.

4. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, 求 $\operatorname{grad}f(r),\operatorname{div}\,(f(r)\boldsymbol{r})$ 和 $\operatorname{curl}\,(f(r)\boldsymbol{r})$.

5. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+k\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$ 是常向量, 证明:

(1) $\operatorname{curl}\boldsymbol{r}=0$;

(2) $\operatorname{curl}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{c}$.

6. 求满足 $\operatorname{div}\,(f(r)\boldsymbol{r})=0$ 的函数 $f(r)$.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是无旋场, 证明: $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是无源场.

26.2.4练习题

1. 证明:

(1) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f)=0$;

(2) $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{a}$, 其中 $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{\Delta}a_1,\boldsymbol{\Delta}a_2,\boldsymbol{\Delta}a_3)$.

2. (第二 Green 公式) 设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 $\boldsymbol{\Omega}$, u,v 在 $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ 上二次连续可微. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 n 为 Σ 的单位外法向量.

3. Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u 在 $\bar{\Omega}$ 上二次连续可微, 在 Ω 上调和. 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S,$$

并由此证明调和函数的唯一性, 即调和函数在 Ω 内部的值由它在边界 Σ 上的值唯一确定.

4. 在调和函数性质 1 的条件下, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$u(M_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\iiint\limits_{B_R(M_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5. 证明命题 26.2.1 的推论.

6. 证明: Poisson 积分公式 (26.20) 定义的函数是调和函数.

7. 证明: 调和函数无限次可微.

8. 若 f 和 $g\circ f$ 都是一连通开集上的调和函数, g 二阶连续可微, f 不是常值函数, 证明: g 是线性函数.

9. 证明: 问题 @跟锦数学微信公众号

$$\Delta u = f(x,y,z), (x,y,z)\in D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y,z), (x,y,z)\in\partial D$$

有解的必要条件是 $\displaystyle\iiint\limits_{D} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\partial D} g\,\mathrm{d}S.$

26.3.2第1组参考题

1. 设 A, B 为光滑向量场, 证明:

(1) $\nabla(A\cdot B) = A\times(\nabla\times B) + B\times(\nabla\times A) + (B\cdot\nabla)A + (A\cdot\nabla)B$;

(2) $\nabla\times(A\times B) = (B\cdot\nabla)A - (A\cdot\nabla)B + (\nabla\cdot B)A - (\nabla\cdot A)B$.

2. 设 G 是 $\mathbb{R}^3$ 中关于原点的星形区域, $F(x,y,z)$ 为 G 上的光滑无源场, 定义 @跟锦数学微信公众号

$$A(x,y,z) = \int_0^1 [tF(tx,ty,tz)\times r]\,\mathrm{d}t.$$

利用上题 (2) 证明: $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑向量场, $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上二次连续可微的向量场, 满足 @跟锦数学微信公众号

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明: $\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=0$, 其中 L 是以原点为中心的球面上的封闭光滑简单定向曲线, $\boldsymbol{\tau}$ 是 L 上与其方向一致的单位切向量.

4. 设长度为 l 的平面简单闭曲线 C 由方程 $F(x,y)=0$ 确定. $F(x,y)$ 二阶连续可微, 且 $\nabla F(x,y)\neq 0$, 设 $D=\{(x,y);F(x,y)>0\}$ 为曲线 C 围成的区域, 计算二重积分 $\iint\limits_D \nabla\cdot\left(\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. 设 $u(x,y,z)$ 是连续函数, 它在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续二阶偏导数, 记 @跟锦数学微信公众号

$$F(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\partial B_R(M)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\partial B_R(M)$ 是以 M 为中心, R 为半径的球面. 证明: $\lim\limits_{R\to 0}F(R)=u(M)$. 若 $\Delta u(M)$ 不等于零, 求无穷小量 $F(R)-u(M)$ 的主要部分.

6. 设 u,v 在 $\bar{\Omega}$ 上二阶连续可微, 且在 Ω 的边界上 $u=v$. 如果 u 是调和函数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\leqslant\iiint\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

7. 设 $u(x,y,z)$ 在 $x^2+y^2<1$ 二阶连续可微, 且 $\Delta u=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 证明: @跟锦数学微信公众号

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

26.3.2第2组参考题

1. 证明: 处处满足平均值公式的连续函数一定是调和函数.

2. 设 $u_n(x,y)$ 是定义在圆盘 B_R 上的调和函数序列, 都在 $\bar{B}_R$ 上连续, 若 $u_n(x,y)$ 在 B_R 的边界 ∂B_R 上一致收敛, 则 $u_n(x,y)$ 在 B_R 上也一致收敛, 并且极限函数也是调和函数.

3. 设 $u(x,y,z)$ 在区域 D 上二阶连续可微, 证明: $\Delta u \geqslant 0$ ($\forall\ (x,y,z)\in D$) 的成分必要条件是 @跟锦数学微信公众号

$$u(M_0) \leqslant \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\partial B_R(M_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S, \quad \forall\ B_R(M_0) \subset D.$$

4. 设 $u(x,y,z)$ 是由光滑曲面 S 所包围的有界区域 Ω 上的调和函数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{S} \left[u(\xi,\eta,\zeta) \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{r} = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z), r = |\boldsymbol{r}|$.

5. 利用 Poisson 积分公式证明不等式 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{R-r}{R+r} u(x_0,y_0) \leqslant u(x,y) \leqslant \frac{R+r}{R-r} u(x_0,y_0),$$

其中 u 是以 R 为半径, (x_0,y_0) 为圆心的开圆盘上的非负调和函数, $r < R$ 是 (x,y) 与 (x_0,y_0) 的距离.

6. 证明: 全平面上有界的调和函数一定是常数.